Introdução à Lógica - Exercícios

Há exercícios mais difíceis e/ou mais importantes do que outros. Utilizaremos uma classificação para eles quanto ao

nível de importância

i4	=	muito importante
i3	=	importante
i2	=	medianamente importante
i1	=	pouco importante

nível de Dificuldade

d5	=	Difícil
d4	=	Medianamente difícil
d3	=	Médio
d2	=	Relativamente fácil
d1	=	Fácil

Capítulo 1

1. (i2d3) Faça uma sentença que não é verdadeira nem falsa diferente das que foram apresentadas no texto.

2. (i1d4) Construa um paradoxo com a seguinte estrutura: ha uma seqüência de frases F_1, F_2, ..., F_n onde cada frase F_i diz algo sobre a falsidade ou veracidade de F_{i+1} (F_n refere-se a F_1). Esta seqüência possui algum tipo de "formato"ou "forma"? Por exemplo, n deve ser par ?

3. (i1d1) Cite três lógicas. Qual estudamos neste curso ? Por quê ?

4. (i2d3) Explique o paradoxo de Russel.

5. (i2d3) Explique o paradoxo de Berry.

6. (i3d1) Quem criou a lógica ? Em que século ?

Capítulo 2

7. (i2d5) É MU um teorema do sistema MIU ?

8. (i4d2) Faça um meta-teorema para o sistema MIU.

9. (i3d2) Deduza o teorema

$\odot$ p $\odot\odot$ $\odot$ q $\odot$ $\odot$ $\odot$ $\odot$
no sistema pq.

10. (i4d2) Faça um meta-teorema para o sistema pq. Dica: qual o formato dos teoremas ?

11. (i1d2) O sistema pq é capaz de representar a soma de dois números quaisquer ? Ou x, em "x p y q z"precisa ser maior do que y?

12. (i2d2) Acrescente a seguinte regra ao sistema pq: Se x, y e z são seqüências contendo apenas $\odot$ e
x p y q z
é um teorema, então
y p x q z
é um teorema.

Faça uma prova de $\odot$ $\odot$ p $\odot\odot$ q $\odot$ $\odot$ $\odot$ $\odot$ que utilize esta nova regra. Interpretando as seqüências como números, a que regra da aritmética corresponde este teorema ?

13. (i2d3) Seja S o sistema formal que utiliza o alfabeto { E, T, N, $+$, $*$, 0, 1, ... 9 }. O único axioma é E e qualquer seqüência de símbolos é uma fórmula. As regras de dedução são:

1. Em um teorema qualquer, E pode ser substituído por $E + T$ ou T;
2. Em um teorema qualquer, T pode ser substituído por $T * N$ ou N;
3. Em um teorema qualquer, N pode ser substituído por 0, 1, ..., 9.

Escreva alguns teoremas deste sistema formal. Algns teoremas nunca poderão ser utilizados para a construção de outros teoremas, pois eles não possuem as letras E, T ou N. Com o que se parecem estes teoremas ?

14. (i2d4) Considere o seguinte sistema formal S:

- alfabeto = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, − };
- qualquer seqüência de letras do alfabeto é uma fórmula;
- todo número é um axioma. Um número é uma seqüência de um ou mais dígitos como 0, 5, 32, 8213, etc;
- se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são teoremas, as regras de dedução são: a) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ é teorema; b) $(\mathcal{A}-\mathcal{B})$ é teorema.

Como são os teoremas deste sistema formal ? Podemos generalizar e construir um sistema formal onde todos os programas válidos da linguagem C/C++/Pascal/Java sejam teoremas ?

Capítulo 3, Seção 3.1

15. (i5d1) Rigorosamente, é $\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ realmente uma fórmula do CP ? Explique o que é uma

meta-fórmula.

16. (i5d1) Explique o que é um esquema de axioma. É $\mathcal{A}\longrightarrow(\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{A})$ realmente um axioma ?

17. (i5d1) Remova o maior número possível de parênteses das seguintes fórmulas

$(((\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\longrightarrow(\neg(\mathcal{B})\longrightarrow(\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{A})))\wedge\mathcal{C})$
$(\neg\mathcal{A}\longrightarrow(\mathcal{B}\vee\mathcal{C}))\longleftrightarrow(((\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\vee\mathcal{C})\longleftrightarrow\mathcal{A})$
$(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\wedge\mathcal{C}$
$(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})\longleftrightarrow(\mathcal{A}\longrightarrow\neg\mathcal{B})$

18. (i5d1) Quais seqüências de símbolos abaixo são fórmulas do CP ?

(a) $\neg\neg\neg\neg\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{A}$

(b) $\vee\wedge\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}$

(c) $((A_1\longrightarrow A_2)\vee A_1$

19. (i5d1) Os conectivos $\longleftrightarrow$, $\wedge$ e $\vee$ fazem parte da linguagem do CP ?

20. (i5d1) Explique o que é uma prova.

21. (i5d1) O que é um teorema ?

22. (i3d2) O que é uma teoria (sistema formal) decidível ?

23. (i2d4) Se as regras de um sistema formal sempre produzem teoremas de tamanho crescente, o sistema é decidível ? Explique.

24. (i4d2) Explique o que querem dizer as notações seguintes:

(a) $\mathcal{A},\mathcal{B}\vdash\mathcal{A}$

(b) $\Gamma\vdash\mathcal{A}$

(c) $\mathcal{A}\vdash\varphi$

(d) $\mathcal{A}\nvdash\neg\mathcal{A}$

(e) $\vdash_{cp}\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$

(f) $\vdash_T\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{A}$, onde T é uma teoria (sistema formal).

25. (i4d3) Prove:

(a) Se $\Delta \subseteq \Gamma$ e $\Delta \vdash \mathcal{A}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.

(b) $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ sse[1] há um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash \mathcal{A}$.

(c) Se $\Delta \vdash \mathcal{A}$ e, para cada $\mathcal{B}$ em Δ tivermos $\Gamma \vdash \mathcal{B}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.

(d) $\varphi \vdash \varphi$

(e) Se $\vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$

(f) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$

26. (i5d2) Enuncie o Teorema da Dedução.

27. (i5d2) Utilizando o teorema da dedução, faça a prova de $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$.

28. (i5d2) Prove utilizando os axiomas e a regra de dedução MP:

(a) $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

(b) $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$

(c) $((\mathcal{A} \longrightarrow (\neg\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A})) \longrightarrow ((\mathcal{A} \longrightarrow \neg\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A})))$

(d) $((\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$

(e) $\mathcal{A} \longrightarrow (\mathcal{B} \longrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$

Capítulo 3, Seção 3.2

29. (i5d1) Explique: a tabela verdade dada abaixo na verdade representa infinitas tabelas verdade.

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
V	F
F	V

30. (i4d1) Podemos afirmar que, na Matemática, $(7 < 1) \longrightarrow (0 = 0)$? E $(7 < 1) \longrightarrow (0 = 1)$? Se sim, faça uma prova informal destes dois "teoremas".

31. (i3d1) Escreva a tabela verdade do "ou"exclusivo.

32. (i2d1) Quais os nomes, em Português, dos operadores $\neg$, $\longrightarrow$ e $\longleftrightarrow$?

[1] se e somente se

33. (i5d1) Defina tautologia e contradição.

34. (i5d3) Dada a fórmula $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ podemos dizer que $\mathcal{A}$ implica logicamente $\mathcal{B}$? Dada a fórmula $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{B}$ podemos dizer que $\mathcal{A}$ é logicamente equivalente a $\mathcal{B}$?

35. (i3d2) Prove: se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ são tautologias, então $\mathcal{B}$ é uma tautologia.

36. (i3d3) Considerando que $(\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B})$ é logicamente equivalente a $(\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, então a fórmula

$$\mathcal{C} \wedge ((\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}) \longleftrightarrow \mathcal{C})$$

é logicamente equivalente à fórmula

$$\mathcal{C} \wedge ((\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \longleftrightarrow \mathcal{C})$$

? Qual teorema garante isto ?

37. (i4d3) Simplifique as seguintes fórmulas

(a) $(((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\neg \mathcal{B})) \longrightarrow \mathcal{A})$

(b) $\neg\neg \mathcal{A} \longleftrightarrow ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$

(c) $\neg(\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B})$

(d) $\neg((\mathcal{A} \longrightarrow \neg \mathcal{B}) \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}))$

(e) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$

38. (i4d2) Construa a tabela verdade para

$(\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{B})$ e

$(\mathcal{A} \longrightarrow (\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C})) \longrightarrow ((\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}))$.

39. (i4d2) Usando tabelas verdade, prove que as fórmulas seguintes são tautologias.

(a) $\neg\neg \mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{A}$

(b) $(\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}) \longleftrightarrow (\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B})$

(c) $\neg(\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{A})$

(d) $(((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\neg \mathcal{B})) \longrightarrow \mathcal{A})$

(e) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$

(f) $\mathcal{A} \longrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})$

40. (i5d4) Represente $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{B}$ utilizando apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.

41. (i5d4) Pode-se representar $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ e $\neg$ utilizando-se apenas $\longrightarrow$ e $\longleftrightarrow$?

42. (i4d3) Encontre uma fórmula correspondente à seguinte tabela verdade:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	?
V	V	V	V
V	V	F	V
V	V	V	V
V	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

Capítulo 3, Seção 3.3

43. (i4d2) Encontre uma fórmula na FND que seja logicamente equivalente à fórmula encontrada no exercício anterior.

44. (i4d1) Quais das fórmulas abaixo estão na FNC ? E na FND ?

(a) $(\neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \wedge \mathcal{A}$

(b) A_1

(c) $A_1 \wedge \mathcal{B}$. Esta é uma fórmula ?

(d) $(\neg\neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$

(e) $A_5 \vee (A_1 \wedge \neg A_3 \wedge \neg A_5) \vee \neg A_2$

(f) $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$. Esta é uma fórmula ?

45. (i5d2) Encontre uma fórmula na FND correspondente à seguinte tabela verdade:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	?
V	V	V	V
V	V	F	F
V	V	V	F
V	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

46. (i5d2) Encontre uma fórmula na FNC e FND correspondente à seguinte tabela verdade:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	?
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

47. (i2d3) Quantas tabelas verdade com n variáveis existem ? Justifique.

48. (i1d4) Prove que $\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee ... \vee \mathcal{A}_n)$ é logicamente equivalente a $\neg\mathcal{A}_1 \wedge \neg\mathcal{A}_2 \wedge ... \wedge \neg\mathcal{A}_n$ utilizando indução finita em n.

Capítulo 3, Seção 3.4

49. (i2d4) Explique o que é sintaxe e o que é semântica de uma teoria (em particular, do CP).

50. (i3d4) Podemos utilizar as palavras verdadeiro e falso quando falamos dos teoremas de um sistema formal; isto é, quando falamos exclusivamente da parte sintática de uma teoria ?

51. (i1d4) Há teorias em que existe uma verdade que nunca é alcançada pelo sistema formal. Isto é, os axiomas e as regras de dedução nunca conseguem produzir algumas fórmulas que sabemos que são verdadeiras. Deveriam ser teoremas, mas não são. O teorema da completude se aplicaria a um destes sistemas (adaptado a ele, logicamente) ?

52. (i2d4) Explique a relação entre sintaxe e semântica, em particular em como um sistema formal é construído e como se confere se o sistema é realmente o que queríamos.

53. (i1d1) Verifique que os axiomas A2 e A3 são tautologias.

54. (i3d1) Crie um sistema formal inconsistente.

55. (i3d2) Prove que o cálculo proposicional é consistente.

56. (i2d3) Explique como o teorema $\neg\mathcal{A}\longrightarrow(\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B})$ do CP faz com que todas as fórmulas sejam teoremas se existir uma fórmula $\mathcal{A}$ tal que $\vdash \mathcal{A}$ e $\vdash \neg\mathcal{A}$.

Capítulo 3, Seção 3.4

57. (i4d3) Faça o tablô das fórmulas seguintes e verifique quais delas são tautologias.

(a) $\neg\neg\mathcal{A}\longleftrightarrow\mathcal{A}$

(b) $(\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B})\longleftrightarrow(\neg\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$

(c) $\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}\longrightarrow\neg\mathcal{C}\longrightarrow((\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\vee\mathcal{C})$

(d) $((\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\vee(\mathcal{A}\longleftrightarrow\mathcal{B}))\longrightarrow\mathcal{A}$

(e) $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}\wedge\mathcal{D}\longleftrightarrow((\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B})\longrightarrow(\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}))$

(f) $A_2\vee(A_1\wedge\neg A_2)\longrightarrow\neg A_2$