Exercícios

Obedeça à seguinte seqüência de prioridade ao fazer exercícios para a prova: primeiro os exercícios da apostila, depois exercícios os marcados com (*) abaxio e, se houver tempo, os outros exercícios desta lista.

1. (*) O que é uma linguagem de primeira ordem ?

2. Cite uma proposição que pode ser expressa na lógica de primeira ordem mas não no cálculo proposicional.

3. Se levarmos a definição de linguagem de primeira ordem estritamente, é $\forall x\, P(x)$ uma fórmula válida ?

4. (*) Explique o que é: a) uma meta-variável; b) uma meta-fórmula; c) um meta-teorema e d) um esquema de prova.

5. (*) O que é uma teoria de primeira ordem.

6. (*) Quando dizemos que A é uma fórmula, isto significa que A não possui variáveis livres ? Quando dizemos que $A(x)$ é uma fórmula com variável livre x, isto significa que x é a única variável livre ?

7. Crie um conjunto de fórmulas lógicas que caracterizem um conjunto de times de futebol qualquer que está disputando um campeonato. Não faça fórmulas específicas que sirvam, por exemplo, apenas para os times nacionais mais importantes.

8. Explique a frase: "um conjunto de fórmulas lógicas comprimem informações sobre uma parte do mundo real". Na sua explicação, explique porque as deduções que podem ser feitas utilizando as fórmulas permitem comprimir uma grande quantidade de informação em poucas fórmulas.

9. (*) Faça um conjunto de fórmulas Γ que caracterizem a copa do mundo de 2006. Isto é, o modelo que queremos espelhar nas fórmulas é a copa do mundo da Alemanha. Na linguagem utilizada, deve existir três constantes c_1, c_2 e c_3 que correspondem ao Brasil, Argentina e Alemanha. A linguagem deve ter um símbolo de predicado $G(x)$ tal que G^{Copa}, o predicado do modelo, seja igual a $\{\text{Brasil}\}$. Este predicado representa o time vencedor da Copa. Obviamente, as suas fórmulas devem ser tais que possa-se obter $\Gamma \vdash G(c_1)$ e $\Gamma \vdash G(x) \longrightarrow (x = c_1)$. Mas $G(c_1)$ não pode ser uma fórmula de Γ.

10. Dê exemplo de um termo e de uma fórmula tal que o termo não é livre para uma variável livre x na fórmula.

11. Explique que problemas podem ocorrer se substituímos, sem cuidados adequados, uma variável livre por um termo qualquer em uma fórmula. Dê um exemplo.

12. (*) Quais as regras utilizadas em teorias de primeira ordem ? Uma destas regras, quando aplicada utilizando fórmulas B e C, cria uma nova fórmula A. Esta nova fórmula é maior ou igual a B e C (em número de símbolos) ? A outra regra utiliza apenas uma fórmula B e cria uma fórmula C a partir dela. C é maior do que B ? Com estas informações, e só elas, pode-se deduzir que qualquer teoria de primeira ordem é decidível ?

13. Explique o axiomo A7 em palavras.

14. (*) O que é um cálculo de predicados de primeira ordem ?

15. (*) O que é um axioma não lógico ?

16. Discuta: os axiomas A1-A7 das teorias de primeira ordem não permitem descrever quaisquer características específicas de nenhuma parte da Matemática como Aritmética, Geometria Analítica, Álgebra, etc.

17. Considere uma teoria de primeira ordem que utiliza uma linguagem com um símbolo de predicado $<$ binário, uma função f unária e constantes $c_1, c_2, \ldots$. Esta teoria não emprega, como em todo o texto da apostila, axiomas não lógicos. Pode-se afirmar que esta teoria é consistente ? Que teorema garante isto ?

18. É $\forall x\ (P(x) \longrightarrow P(x))$ uma instância de uma tautologia ? E $\forall x\ P(x) \longrightarrow \forall x\ P(x)$?

19. Porque pode-se fazer provas em teorias de primeira ordem considerando-se todas as instâncias de tautologias como teoremas ?

20. (*) Seja A uma fórmula que ocorre dentro de uma fórmula B. A fórmula B' é construída a partir de B trocando-se as ocorrências de A por A' sendo que $\vdash A \longleftrightarrow A'$. Se $\vdash B$, então pode-se afirmar que $\vdash B'$? Dê um exemplo de fórmulas A, A' e B que obedecem a estas especificações.

21. Por quê podemos utilizar outras regras na prova de teoremas além de MP e Gen ?

22. Por quê podemos utilizar um teorema já provado na prova de um outro teorema ?

23. (*) Se obtivermos $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash \neg A$, onde Γ é um conjunto de fórmulas, isto significa que houve um erro em nossas deduções; isto é, houve um erro nosso ?

24. (*) Se obtivermos $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash \neg A$, onde Γ é um conjunto de fórmulas, isto significa que $\Gamma \vdash B$ onde B é uma fórmula qualquer ?

25. Cite cinco regras de inferência (ou dedução) para teorias de primeira ordem que não MP e Gen.

26. Defina estrutura para uma linguagem. Dê um exemplo de linguagem e de duas estruturas para ela.

27. As funções de uma estrutura podem ser de um subconjunto do universo para outro subconjunto ?

28. (*) Escreva, em Português, o significado da fórmula $\forall x\ (P_d(x,\ y) \longrightarrow \neg\exists z\ P_d(y,\ z))$ utilizando o modelo Zoo. Verifique se esta fórmula é verdadeira no modelo Zoo.

29. (*) Explique o que é sintaxe e o que é semântica na lógica de primeira ordem.

30. Defina modelo de um conjunto de fórmulas. Faça um exemplo de modelo de um conjunto de duas fórmulas.

31. (*) O valor de um termo t em uma estrutura $\mathfrak{M}$ é um objeto de que tipo ? É símbolo da linguagem ? Constante ? Um número natural ou real ?

32. Explique em palavras com se calcula o valor de um termo para uma estrutura utilizando $\vec{a}$ como seqüência.

33. (*) Dê um exemplo de modelo e de verificação que $\mathfrak{M} \models (\forall x\ A(x))[\vec{a}]$ para certa fórmula A com variável livre x e seqüência $\vec{a}$.

34. Explique: uma estrutura representa parte do mundo em forma de conjuntos e associações com símbolos de uma linguagem mais as regras da lógica clássica.

35. Defina fórmula verdadeira e falsa em uma estrutura.

36. (*) Faça uma estrutura e uma fórmula tal que a fórmula não seja nem verdadeira nem falsa na estrutura.

37. Considere modelos $\mathfrak{A}_i$, $i \in \mathbb{N}$ e fórmulas B, C e D tais que:

(a) $\mathfrak{A}_i \models B$ para i par;

(b) $\mathfrak{A}_i \models C$ para i primo;

(c) $\mathfrak{A}_i \models D$ para i ímpar.

Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras.

(a) $\mathfrak{A}_2 \models \{B,\ C\}$

(b) $\mathfrak{A}_i \models \{C,\ D\}$ para i primo;

(c) $\mathfrak{A}_i \models \{B,\ C,\ D\}$ para $i \in \mathbb{N}$;

Justifique.

38. (*) Prove que o axioma $A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$ é verdadeiro em qualquer estrutura.

39. (*) Represente graficamente as fórmulas logicamente válidas de uma linguagem (como feita na apostila). Mostre onde estão estas fórmulas no desenho.

40. Pode uma fórmula que represente uma informação específica de uma estrutura ser logicamente válida ?

41. (*) Faça uma fórmula A de uma linguagem $\mathcal{L}$ tal que todos os modelos de A tenham apenas um elemento.

42. Faça uma fórmula A de uma linguagem $\mathcal{L}$ tal que todos os modelos de A tenham exatamente dois elementos.

43. Uma estrutura de uma linguagem $\mathcal{L}$ pode associar duas constantes da linguagem a um mesmo elemento do universo da estrutura ? Dê um exemplo.

44. Uma estrutura de uma linguagem $\mathcal{L}$ pode associar dois símbolos de função da linguagem a uma mesma função da estrutura ? Dê um exemplo.

45. Enuncie o teorema da Correção para lógicas de primeira ordem.

46. (*) Faça um conjunto de fórmulas Γ inconsistente sem que este conjunto contenha fórmulas da forma A e $\neg A$.

47. Dado um conjunto Γ qualquer, se $\Gamma \nvdash A$, então necessariamente $\Gamma \vdash \neg A$?

48. (*) Explique, sem provar, o teorema da Completude de Gödel: um conjunto de fórmulas fechadas (sentenças) Γ em uma linguagem $\mathcal{L}$ é consistente se e somente se Γ tem modelo em $\mathcal{L}$.

49. Explique, sem provar, o teorema da Completude de Gödel: dado um conjunto de fórmulas fechadas Γ e uma fórmula fechada A em uma linguagem $\mathcal{L}$, então $\Gamma \models A$ se e somente se $\Gamma \vdash A$.

Para as questões abaixo, assuma que $\mathcal{L}_P$ é a linguagem utilizada pelos axiomas de Peano expressos em uma linguagem de primeira ordem e Γ_P é o conjunto de fórmulas que representam estes axiomas em primeira ordem.

50. Invente uma nova maneira de associar números a fórmulas das linguagens de primeira ordem.

51. Associe números a fórmulas de primeira ordem utilizando números primos: uma fórmula $\neg A$ poderia ser codificada como 2^n onde n é o número de A, $A \longrightarrow B$ poderia ser codificada como $3^n 5^m$ onde n é o número de A e m é o número de B e assim por diante.

52. (*) Como uma propriedade sobre os números naturais pode ser representada por uma fórmula da linguagem $\mathcal{L}_P$ com uma variável livre ?

53. Qualquer propriedade que é ou não é satisfeita por qualquer número natural pode ser escrita por uma fórmula da linguagem $\mathcal{L}_P$ com uma variável livre ?

54. Pode-se fazer um algoritmo que imprime, um por vez, os elementos do conjunto $R = \{A : \Gamma_P \vdash A\}$? Justifique.

55. Pode-se fazer um algoritmo que imprime, um por vez, os elementos do conjunto $R = \{A : \Gamma_P \nvdash A\}$? Justifique.

56. (*) Represente por fórmulas na linguagem $\mathcal{L}_P$ as seguintes funções da Aritmética:

(a) $+$

(b) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n)$ é 1 se n é par e 0 se n é ímpar;

(c) $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(n) = 0$ para qualquer n;

(d) $h : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(n,\, m) = (n + m) \centerdot 2$.

57. Pode-se encontrar um algoritmo que não pode ser representado por uma fórmula de $\mathcal{L}_P$?

58. (*) O que é Aritmética ?

59. (*) Existe um algoritmo que diz se uma fórmula A de $\mathcal{L}_P$ é teorema tomando-se Γ_P como hipóteses ?

60. (*)[1]Com relação ao Teorema de Gödel (Incompletude), comente as seguintes frases, corrigindo-as se for necessário:

(a) Gödel encontrou uma fórmula A tal que $\Gamma_P \nvdash A$ e $\Gamma_P \nvdash \neg A$ e nós não sabemos se A é verdadeira na Aritmética ou não;

(b) Gödel encontrou uma fórmula A tal que nem A nem $\neg A$ são verdadeiras no modelo da Aritmética, mas nós sabemos que A é verdadeira;

(c) Gödel encontrou uma fórmula A tal que $\Gamma_P \nvdash A$ e $\Gamma_P \nvdash \neg A$ e nós sabemos que A é verdadeira na Aritmética;

(d) Gödel provou que existe uma fórmula tal que nem ela nem a sua negação são teoremas tomando-se Γ_P como hipóteses;

(e) Gödel provou que existe uma fórmula tal que nem ela nem a sua negação são teoremas tomando-se Γ_P como hipóteses. Mas ele não mostrou esta fórmula, apenas provou que existe;

[1]Este exercício é importante mas não deve ser prioritário.

(f) considere uma fórmula A que significa, intuitivamente, "eu sou indemonstrável usando Γ_P". Então se $\Gamma_P \vdash A$ temos uma contradição;

(g) considere uma fórmula A que significa, intuitivamente, "eu sou indemonstrável usando Γ_P", ou seja "A é indemonstrável usando Γ_P". Então se $\Gamma_P \vdash \neg A$ temos uma contradição pois $\neg A$ significa "A é demonstrável usando Γ_P" e então teríamos deduzido que A é demonstrável quando na verdade o que é demonstrável é $\neg A$. Assuma que Γ_P é um conjunto consistente de fórmulas.