Segunda Prova de Introdução à Lógica.
Primeiro Semestre de 2006.
Departamento de Computação – UFSCar.
José de Oliveira Guimarães.

Na resposta das questões, justifique cada passo do seu raciocínio a menos de menção em contrário. Em uma prova, ao usar um teorema/proposição/lema, cite o seu nome ou escreva-o explicitamente na resposta.

Ao fim da prova, entregue apenas a folha de respostas. Isto é, não entregue esta folha ou o rascunho.

1. (3.0) Prove os itens abaixo utilizando os axiomas das teorias de primeira ordem e as regras de dedução. Numere os passos da prova e justifique cada um deles como feito na apostila.

(a) $\forall x\, A(x) \vdash A(c)$;

(b) $\exists x\, P(x),\ \neg Q(x,\ c) \longrightarrow \forall x\, \neg P(x) \vdash Q(x,\ c)$. Será necessário utilizar a definição de $\exists$.

Resolução:

(a)

1. $\forall x\, A(x)$, hipótese
2. $\forall x\, A(x) \longrightarrow A(c)$, instância do axioma A4 com $t = c$;
3. $A(c)$, MP 1, 2

(b)

1. $\neg Q(x,\ c) \longrightarrow \forall x\, \neg P(x)$, hipótese
2. $\neg \forall x\, \neg P(x) \longrightarrow \neg\neg Q(x,\ c)$, logicamente equivalente a 1 por $\models (A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg A)$;
3. $\exists x\, P(x) \longrightarrow Q(x,\ c)$, logicamente equivalente a 2 após usar a definição de $\exists$;
4. $\exists x\, P(x)$, hipótese;
5. $Q(x,\ c)$, MP 3, 4

2. (2.0) Prove que se $A \vdash B$ e $B \vdash A$, com A e B fechadas, então $\models A \longleftrightarrow B$; isto é, A e B são logicamente equivalentes.

Resolução: se $A \vdash B$, pelo Teorema da Dedução, $\vdash A \longrightarrow B$. Pelo mesmo motivo, de $B \vdash A$ temos $\vdash B \longrightarrow A$. Pelo lema (1), $\vdash A \longleftrightarrow B$ e, pelo Teorema da Completude de Gödel, $\models A \longleftrightarrow B$.

(1) Se $\vdash A \longrightarrow B$ e $\vdash B \longrightarrow A$, então $\vdash A \longleftrightarrow B$.

3. (2.5) Baseado na afirmação

$$\{\forall x\, P(x)\} \vDash \exists y\, P(y)$$

faça os itens abaixo:

(a) (1.0) explique porque esta afirmação é correta usando palavras — não faça uma prova *formal* usando a *definição* de modelo, satisfabilidade, etc; embora você precisará utilizar estas definições, em palavras, na sua resposta (e possivelmente alguns símbolos);

(b) (1.5) prove rigorosamente esta afirmação utilizando a definição de modelo, satisfabilidade, etc. Coloque todos os detalhes possíveis na prova.

Resolução:

(a)

A afirmação diz que todo modelo de $\forall x\, P(x)$ é modelo de $\exists y\, P(y)$. Se em um modelo $\mathfrak{M}$ temos que $\forall x\, P(x)$ é verdadeiro, então para qualquer elemento $b \in \mathrm{M}$, temos $P^{\mathfrak{M}}(b)$ e, portanto, para algum $c \in \mathrm{M}$, $P^{\mathfrak{M}}(c)$. De onde $\exists y\, P(y)$ é verdadeiro em $\mathfrak{M}$.

(b)

Tome um modelo $\mathfrak{M}$ de $\forall x\, P(x)$; isto é, $\mathfrak{M} \vDash \forall x\, P(x)$. Então $\mathfrak{M} \vDash (\forall x\, P(x))[\vec{a}]$ para qualquer $\vec{a}$ e, para todo $b \in \mathrm{M}$, $\mathfrak{M} \vDash P(y)[b]$, o que implica $P^{\mathfrak{M}}(b)$ para todo $b \in \mathrm{M}$. Logo existe um $c \in \mathrm{M}$ tal que $P^{\mathfrak{M}}(c)$ e portanto $\mathfrak{M} \vDash P(y)[c]$. Ou seja, $\mathfrak{M} \vDash (\exists y\, P(y))[\vec{a}]$ para qualquer seqüência $\vec{a}$, o que é o mesmo que $\mathfrak{M} \vDash \exists y\, P(y)$.

4. (2.5) Encontre modelos em que as fórmulas abaixo *não* são verdadeiras. O universo de cada modelo deve ter pelo menos **três** elementos. Não é necessário justificar, apenas descreva o modelo (conjunto universo, predicados e funções).

(a) $\exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$

(b) $\forall x\, \forall y\, (\neg(x = y) \longrightarrow \neg(f(x) = f(y)))$

Resolução:

(a)

$\mathrm{M} = \{0,\ 1,\ 2\}$, $P^{\mathfrak{M}} = \{0\}$, $Q^{\mathfrak{M}} = \{0\}$

(b)

$\mathrm{M} = \{0,\ 1,\ 2\}$, $f^{\mathfrak{M}}(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{M}$.

5. (2.25) Considere a linguagem $\mathcal{L}$ com os símbolos de predicado $J(x,\ y)$ e $C(x)$ e a constante c. $\mathfrak{M}$ é uma estrutura de $\mathcal{L}$ com universo M contendo todos os times da Copa da Alemanha e que interpreta estes símbolos como

- $J^{\mathfrak{M}}(x,\, y)$, x é um time que joga melhor do que y. Naturalmente, um time não é melhor do que ele mesmo (este fato é absolutamente essencial para fazer os itens a) e b) desta questão);
- $C^{\mathfrak{M}}(x)$ é o time campeão;
- $c^{\mathfrak{M}}$ é a seleção brasileira.

Faça fórmulas na linguagem $\mathcal{L}$ que representem as frases seguintes quando interpretadas no modelo $\mathfrak{M}$.

(a) Se um time joga melhor do que todos os outros, ele é o time campeão.

(b) A seleção brasileira é o melhor de todos os times.

(c) Existe um time que joga melhor do que outro mas não é o melhor de todos.

Resolução:

(a)

$$\forall y\, (\neg(x = y) \longrightarrow J(x,\, y)) \longrightarrow C(x)$$

(b)

$$\forall x\, (\neg(x = c) \longrightarrow J(c,\, x))$$

(c)

$$\exists x\, (\exists y\, J(x,\, y) \wedge \exists z\, J(z,\, x))$$

A resposta $\forall y\, J(x,\, y) \longrightarrow C(x)$ para o item **(a)** não está correta. A fórmula $\forall y\, J(x,\, y)$, quando interpretada no modelo dado, é sempre falsa e portanto qualquer elemento poderia ser campeão. É sempre falsa porque $J(y,\, y)$, quando interpretado, é falso e, na interpretação, em algum momento o elemento que "substitui" y se torna igual ao elemento que "substituiu" x.

A resposta $\forall y\, (J(x,\, y) \longrightarrow C(x))$ para o item **(a)** não está correta. Interpretada, esta fórmula diz que, para todo elemento b (que "substitui" y) do universo do modelo, se c (que "substitui" x)joga melhor do que b ($J^{\mathfrak{M}}(c,\, b)$) então c é campeão. Então nesta fórmula um campeão é um time que joga melhor do que algum outro (pode ser um só).

A resposta $\forall y\, (\neg(x = y) \wedge J(x,\, y)) \longrightarrow C(x)$ para o item **(a)** também não está correta. Ao interpretar esta fórmula, quando o elemento que "substitui" y é igual ao elemento que "substitui" x, então $\neg(x = y) \wedge J(x,\, y)$ se torna falso. Conseqüentemente, $\forall y\, (\neg(x = y) \wedge J(x,\, y))$ é falso no modelo dado.

A resposta $\forall x\, J(c,\, x)$ para o item **(b)** não está correta. Ao interpretar esta fórmula, quando o elemento que substitui x for $c^{\mathfrak{M}}$, teremos $J^{\mathfrak{M}}(c^{\mathfrak{M}},\, ^{\mathfrak{M}})$, que é falso. Então $\forall x\, J(c,\, x)$ é uma fórmula falsa quando interpretada no modelo.