Segunda Prova de Introdução à Lógica.
Primeiro Semestre de 2006.
Departamento de Computação – UFSCar.
José de Oliveira Guimarães.

Na resposta das questões, justifique cada passo do seu raciocínio a menos de menção em contrário. Em uma prova, ao usar um teorema/proposição/lema, cite o seu nome ou escreva-o explicitamente na resposta.

Ao fim da prova, entregue apenas a folha de respostas. Isto é, não entregue esta folha ou o rascunho.

1. (3.0) Prove os itens abaixo utilizando os axiomas das teorias de primeira ordem e as regras de dedução. Numere os passos da prova e justifique cada um deles como feito na apostila.

(a) $\forall x\, A(x) \vdash A(c)$;

(b) $\exists x\, P(x),\ \neg Q(x,\, c) \longrightarrow \forall x\, \neg P(x) \vdash Q(x,\, c)$. Será necessário utilizar a definição de $\exists$.

2. (2.0) Prove que se $A \vdash B$ e $B \vdash A$, com A e B fechadas, então $\models A \longleftrightarrow B$; isto é, A e B são logicamente equivalentes.

3. (2.5) Baseado na afirmação

$$\{\forall x\, P(x)\} \models \exists y\, P(y)$$

faça os itens abaixo:

(a) (1.0) explique porque esta afirmação é correta usando palavras — não faça uma prova *formal* usando a *definição* de modelo, satisfabilidade, etc; embora você precisará utilizar estas definições, em palavras, na sua resposta (e possivelmente alguns símbolos);

(b) (1.5) prove rigorosamente esta afirmação utilizando a definição de modelo, satisfabilidade, etc. Coloque todos os detalhes possíveis na prova.

4. (2.5) Encontre modelos em que as fórmulas abaixo *não* são verdadeiras. O universo de cada modelo deve ter pelo menos **três** elementos. Não é necessário justificar, apenas descreva o modelo (conjunto universo, predicados e funções).

(a) $\exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$

(b) $\forall x\, \forall y\, (\neg(x = y) \longrightarrow \neg(f(x) = f(y)))$

5. (2.25) Considere a linguagem $\mathcal{L}$ com os símbolos de predicado $J(x,\, y)$ e $C(x)$ e a constante c. $\mathfrak{M}$ é uma estrutura de $\mathcal{L}$ com universo M contendo todos os times da Copa da Alemanha e que interpreta estes símbolos como

- $J^{\mathfrak{M}}(x,\, y)$, x é um time que joga melhor do que y. Naturalmente, um time não é melhor do que ele mesmo (este fato é absolutamente essencial para fazer os itens a) e b) desta questão);
- $C^{\mathfrak{M}}(x)$ é o time campeão;
- $c^{\mathfrak{M}}$ é a seleção brasileira.

Faça fórmulas na linguagem $\mathcal{L}$ que representem as frases seguintes quando interpretadas no modelo $\mathfrak{M}$.

(a) Se um time joga melhor do que todos os outros, ele é o time campeão.

(b) A seleção brasileira é o melhor de todos os times.

(c) Existe um time que joga melhor do que outro mas não é o melhor de todos.

Frases para pensar

A manteiga é derivada do leite. Logo o leite é integral.

A manteira é derivada da vaca e da ovelha. Logo uma vaca é uma ovelha mais uma constante.