

É altamente recomendado colocar no quadro antes da prova:

1. a definição de prova dada no Corolário 4.2, página 57;
2. algumas equivalências lógicas mais importantes;
3. um exemplo de modelo.

Fatos importantes para a Segunda Prova de Introdução à Lógica

1. Algumas coisas não são especificadas precisamente em uma prova de uma disciplina pois admite-se que alguém que conheça o conteúdo da disciplina (e que tenha estudado o suficiente) saiba do que se trata. Por exemplo, P é usado para símbolo de predicado e que f para um símbolo de função sem que as questões explicitem isto claramente. Contudo, qualquer dúvida pode ser esclarecida pelo professor.

2. Lembre-se que ao usar $A(x)$, em geral x é uma variável livre na fórmula A . Não procuraremos confundi-los neste ponto. Mas x sequer precisa aparecer em A , que poderia ser $\forall y P(x)$

Mesmo assim, poderíamos usar $A(t)$ onde t é um termo qualquer, como 0 , c (constante) ou $f(y, z)$. Em qualquer caso, $A(t)$ seria igual a A , pois x não aparece mesmo em A . Estaríamos substituindo um x , que não está em A , por t , uma operação inútil. Isto é verdade mesmo se x aparece em A mas é ligada, como em $\forall x P(x)$.

3. Para facilitar utilizar axiomas e teoremas que requerem que alguma variável seja livre ou não, é sempre melhor renomear as fórmulas para que elas não tenham variáveis em comum. Por exemplo, o axioma A4,

$$(\forall x A(x)) \longrightarrow A(t)$$

exige que t seja livre para x em $A(x)$. E se tivermos

$$A =_{def} \exists x P(x) \longrightarrow Q(x) \wedge x = y$$

e $t =_{def} x + 1$? Na fórmula A , o x da subfórmula $\exists x P(x)$ nada tem a ver com o x de $x = y$. Então renomeamos o primeiro x (poderia ser o segundo): $A =_{def} \exists z P(z) \longrightarrow Q(x) \wedge x = y$. Agora o x de t é igual ao x de A , que a propósito é $A(x, y)$. Renomeamos o x de t , obtendo $t =_{def} w + 1$. Agora podemos obter uma instância de A4:

$$(\forall x (\exists z P(z) \longrightarrow Q(x) \wedge x = y)) \longrightarrow (\exists z P(z) \longrightarrow Q(w + 1) \wedge w + 1 = y)$$

4. Para provar semanticamente que uma fórmula A é consequência semântica de um conjunto Γ de fórmulas, $\Gamma \models A$, A deve ser verdadeira em todos os modelos de Γ . Assumindo que \mathfrak{M} é modelo de Γ , para qualquer fórmula $B \in \Gamma$ e para qualquer seqüência \vec{a} de M , $\mathfrak{M} \models B[\vec{a}]$. Partindo desta suposição (verdadeira), prove que para qualquer seqüência \vec{a} de M , $\mathfrak{M} \models A[\vec{a}]$. Isto é, A é verdadeira em \mathfrak{M} . Como \mathfrak{M} é um modelo qualquer de Γ , A é verdadeira em todos os modelos deste conjunto. Observe que é importante considerar que \mathfrak{M} é um modelo qualquer de Γ , ele não possui características específicas, é genérico.

5. Para provar que uma fórmula A de uma linguagem \mathcal{L} é logicamente válida, deve-se provar que A é verdadeira em todas as estruturas de \mathcal{L} . Considere então uma estrutura \mathfrak{M} de \mathcal{L} qualquer (genérica, sem características específicas) e prove que $\mathfrak{M} \models A[\vec{a}]$ para toda seqüência \vec{a} de M .
6. Para provar que uma fórmula A não é logicamente verdadeira na linguagem \mathcal{L} , deve-se encontrar uma estrutura \mathfrak{M} de \mathcal{L} em que $\mathfrak{M} \not\models A[\vec{a}]$. Para isto basta encontrar uma única estrutura e uma única seqüência \vec{a} desta estrutura que não satisfaz A .