É altamente recomendado colocar no quadro antes da prova:

1. a definição de prova dada no Corolário 4.2, página 57;
2. algumas equivalências lógicas mais importantes;
3. um exemplo de modelo.

Fatos importantes para a Segunda Prova de Introdução à Lógica

1. Algumas coisas não são especificadas precisamente em uma prova de uma disciplina pois admite-se que alguém que conheça o conteúdo da disciplina (e que tenha estudado o suficiente) saiba do que se trata. Por exemplo, P é usado para símbolo de predicado e que f para um símbolo de função sem que as questões explicitem isto claramente. Contudo, qualquer dúvida pode ser esclarecida pelo professor.

2. Lembre-se que ao usar $A(x)$, em geral x é uma variável livre na fórmula A. Não procuraremos confundi-los neste ponto. Mas x sequer precisa aparecer em A, que poderia ser $\forall y\, P(x)$

Mesmo assim, poderíamos usar $A(t)$ onde t é um termo qualquer, como 0, c (constante) ou $f(y,\, z)$. Em qualquer caso, $A(t)$ seria igual a A, pois x não aparece mesmo em A. Estaríamos substituindo um x, que não está em A, por t, uma operação inútil. Isto é verdade mesmo se x aparece em A mas é ligada, como em $\forall x\, P(x)$.

3. Para facilitar utilizar axiomas e teoremas que requerem que alguma variável seja livre ou não, é sempre melhor renomear as fórmulas para que elas não tenham variáveis em comum. Por exemplo, o axioma A4,

$$(\forall x\, A(x)) \longrightarrow A(t)$$

exige que t seja livre para x em $A(x)$. E se tivermos

$$A =_{def} \exists x\, P(x) \longrightarrow Q(x) \wedge x = y$$

e $t =_{def} x+1$? Na fórmula A, o x da subfórmula $\exists x\, P(x)$ nada tem a ver com o x de $x = y$. Então renomeamos o primeiro x (poderia ser o segundo): $A =_{def} \exists z\, P(z) \longrightarrow Q(x) \wedge x = y$. Agora o x de t é igual ao x de A, que a propósito é $A(x,\, y)$. Renomeamos o x de t, obtendo $t =_{def} w+1$. Agora podemos obter uma instância de A4:

$$(\forall x\, (\exists z\, P(z) \longrightarrow Q(x) \wedge x = y)) \longrightarrow (\exists z\, P(z) \longrightarrow Q(w+1) \wedge w+1 = y)$$

4. Para provar semânticamente que uma fórmula A é conseqüência semântica de um conjunto Γ de fórmulas, $\Gamma \vDash A$, A deve ser verdadeira em todos os modelos de Γ. Assumindo que $\mathfrak{M}$ é modelo de Γ, para qualquer fórmula $B \in \Gamma$ e para qualquer seqüência $\vec{a}$ de M, $\mathfrak{M} \vDash B[\vec{a}]$. Partindo desta suposição (verdadeira), prove que para qualquer seqüência $\vec{a}$ de M, $\mathfrak{M} \vDash A[\vec{a}]$. Isto é, A é verdadeira em $\mathfrak{M}$. Como $\mathfrak{M}$ é um modelo qualquer de Γ, A é verdadeira em todos os modelos deste conjunto. Observe que é importante considerar que $\mathfrak{M}$ é um modelo qualquer de Γ, ele não possui características específicas, é genérico.

5. Para provar que uma fórmula A de uma linguagem $\mathcal{L}$ é logicamente válida, deve-se provar que A é verdadeira em todas as estruturas de $\mathcal{L}$. Considere então uma estrutura $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{L}$ qualquer (genérica, sem características específicas) e prove que $\mathfrak{M} \models A[\vec{a}]$ para toda seqüência $\vec{a}$ de M.

6. Para provar que uma fórmula A não é logicamente verdadeira na linguagem $\mathcal{L}$, deve-se encontrar uma estrutura $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{L}$ em que $\mathfrak{M} \not\models A[\vec{a}]$. Para isto basta encontrar uma única estrutura e uma única seqüência $\vec{a}$ desta estrutura que não satisfaz A.