Segunda Prova de Introdução à Lógica
Lembretes da lógica de primeira ordem

1. Um **termo** é a) uma variável ou constante; b) $f_k^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ se f_k^n é um símbolo de função e t_1, t_2, ... t_k são termos.

2. Uma **fórmula atômica** é $t_1 = t_2$ ou possui a forma $P_k^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ onde P_k^n é um símbolo de predicado e t_1, t_2, ..., t_n são termos.

3. Uma fórmula da linguagem de primeira ordem é definida como a) toda fórmula atômica é fórmula; b) se A e B são fórmulas e x é uma variável qualquer, então $(\neg A)$, $(A \longrightarrow B)$ e $((\forall x)A)$ são fórmulas.

4. $(\exists x)A$ é uma abreviatura para $\neg((\forall x)(\neg A))$ e $(\forall x)A$ é uma abreviatura para $\neg((\exists x)(\neg A))$.

5. $(A \wedge B)$ é $\neg(A \longrightarrow \neg B)$; $(A \vee B)$ é $(\neg A) \longrightarrow B$; $(A \longleftrightarrow B)$ é $(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$.

6. Se A é uma fórmula e t um termo, dizemos que t **é livre para** y **em** A se nenhuma ocorrência de y em A ocorre dentro do escopo de um quantificador ($\forall w$, $\exists w$) onde w é uma variável em t.

7. Axiomas das teorias de primeira ordem:
(A1) $(A \longrightarrow (B \longrightarrow A))$, (A2) $((A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C)))$
(A3) $((\neg B \longrightarrow \neg A) \longrightarrow ((\neg B \longrightarrow A) \longrightarrow B))$
(A4) $(\forall x\, A(x)) \longrightarrow A(t)$ se $A(x)$ é uma fórmula e t é um termo livre para x em $A(x)$
(A5) $(\forall x\, (A \longrightarrow B)) \longrightarrow (A \longrightarrow (\forall x\, B))$ se A não contém ocorrências livres de x
(A6) $x = x$ e (A7) $x = y \longrightarrow (A(x, x) \longrightarrow A(x, y))$, onde $A(x, y)$ é a fórmula A onde algumas ou todas as ocorrências livres de x foram substituídas por y. Assume-se que y é livre para x em $A(x, x)$.

Regras de dedução ou inferência: a) [MP]: se A e $A \longrightarrow B$ são teoremas, B também é teorema. b) [Gen]: se A é teorema, $\forall x\, (A)$ é teorema.

8. Seja A uma tautologia no CP e A' uma fórmula da linguagem de primeira ordem (LPO) obtida de A pela substituição das variáveis proposicionais por fórmulas da LPO. Então A' é chamada de **instância de tautologia**.

9. Uma fórmula é **fechada** se não possui variáveis livres. O **fechamento** de uma fórmula A que possui as variáveis livres x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n} é a fórmula $\forall x_{i_1}\, \forall x_{i_2} \ldots \forall x_{i_n} A$.

10. (Teorema da Dedução) Se A é uma fórmula fechada e $\Gamma, A \vdash B$ então $\Gamma \vdash A \longrightarrow B$.

11. Se $\vdash A \longleftrightarrow B$, então $\vdash A$ sse $\vdash B$. Se $\neg A \vdash B \wedge \neg B$ e A não possui variáveis livres, $\vdash A$. Se $\vdash A$, então $\vdash A \vee B$. Se $\vdash A$, então $\vdash B \vee A$. $\vdash A \wedge B$ sse $\vdash A$ e $\vdash B$. $\vdash A \vee B$ sse $\vdash B \vee A$.

12. $\vdash A \wedge B$ sse $\vdash B \wedge A$. Se $\vdash A \vee B$, $\vdash A \longrightarrow C$ e $\vdash B \longrightarrow C$, então $\vdash C$. Se $\vdash A \vee B$ e $\vdash \neg A$, então $\vdash B$. Se $\vdash A \longrightarrow B$ e $\vdash B \longrightarrow A$, então $\vdash A \longleftrightarrow B$. Se $\vdash A \longrightarrow B$ e $\vdash B \longrightarrow C$, então $\vdash A \longrightarrow C$. Se $\vdash A \longleftrightarrow B$ e $\vdash B \longleftrightarrow C$, então $\vdash A \longleftrightarrow C$.

13. $\vdash A \longleftrightarrow B$ sse $\vdash A \longrightarrow B$ e $\vdash B \longrightarrow A$. Se $\vdash A \longrightarrow B$ e x não é livre em A, então $\vdash A \longrightarrow \forall x\, B$. Se $\vdash A$ e A' é $A(t_1, t_2, ...t_n)$, onde t_i substitui a variável livre x_i de A, então $\vdash A'$. Se $\vdash A \longrightarrow B$, então $\vdash \exists x\, A \longrightarrow \exists x\, B$ e $\vdash \forall x\, A \longrightarrow \forall x\, B$.

14. Se uma fórmula A possui como variáveis livres x_1, x_2, ..., x_n, então

a) $\vdash A(t_1, t_2, ...t_n) \longrightarrow \exists x_1\, \exists x_2 \ldots \exists x_n\, A$

b) $\vdash \forall x_1\, \forall x_2 \ldots \forall x_n\, A \longrightarrow A(t_1, t_2, ...t_n)$

onde t_i substitui x_i em $A(t_1, t_2, ...t_n)$.

15. Se $\vdash A$ é o fechamento de A, então $\vdash A$ sse $\vdash A'$.

16. Seja $\mathcal{L}$ a linguagem associada a um conjunto de fórmulas Γ. Uma **estrutura** $\mathfrak{M}$ para $\mathcal{L}$ consiste de: 1) um conjunto $\mathrm{M} \neq \emptyset$ chamado de universo da estrutura. e 2) uma função I de interpretação tal que a) para cada símbolo de função f de $\mathcal{L}$ de n argumentos, $I(f)$ corresponde a uma função de M^n em M. $f^{\mathfrak{M}}$ será utilizado para denotar $I(f)$; b) para cada símbolo de predicado P de $\mathcal{L}$ de aridade n, $I(P)$ corresponde a uma relação em M^n. $P^{\mathfrak{M}}$ será utilizado para denotar $I(P)$ e c) para cada constante c de $\mathcal{L}$, $I(c)$ corresponde a um elemento fixo de M, que será denotado por $c^{\mathfrak{M}}$. Escreveremos $\mathfrak{M} =< \mathrm{M}, I >$ para uma estrutura $\mathfrak{M}$ com conjunto universo M e função de interpretação I.

17. Seja $A(v_1, v_2, ...v_n)$ uma fórmula em uma linguagem $\mathcal{L}$, v_i, v_2, ... v_n meta-variáveis, $\mathfrak{M}$ uma estrutura de $\mathcal{L}$ e $\vec{a}$ uma seqüência em M. Escrevemos "$\vec{a}$ satisfaz A em $\mathfrak{M}$", denotado por $\mathfrak{M} \vDash A[\vec{a}]$, se:
1. $\mathfrak{M} \vDash (t_1 = t_2)[\vec{a}]$ sse $t_1^{\mathfrak{M}}[\vec{a}] = t_2^{\mathfrak{M}}[\vec{a}]$
2. $\mathfrak{M} \vDash P(t_1, t_2, ...t_n)[\vec{a}]$ sse $(t_1^{\mathfrak{M}}[\vec{a}],\, t_2^{\mathfrak{M}}[\vec{a}], \ldots t_n^{\mathfrak{M}}[\vec{a}]) \in P^{\mathfrak{M}}$
3. $\mathfrak{M} \vDash \neg B[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{M} \nvDash B[\vec{a}]$. Escrevemos $\mathfrak{M} \nvDash B[\vec{a}]$ para "$\vec{a}$ **não** satisfaz A em $\mathfrak{M}$".
4. $\mathfrak{M} \vDash (B \longrightarrow C)[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{M} \nvDash B[\vec{a}]$ ou $\mathfrak{M} \vDash C[\vec{a}]$
5. Seja y uma variável que não pertence ao conjunto de variáveis utilizadas em A. Então $\mathfrak{M} \vDash (\forall x\, B(x))[\vec{a}]$ sse $\mathfrak{M} \vDash B_y^x[b, \vec{a}]$ para todo $b \in \mathrm{M}$ onde M é o universo da estrutura $\mathfrak{M}$. O símbolo B_y^x é a fórmula B com x substituído por y.

18. Uma fórmula A de uma linguagem $\mathcal{L}$ é **verdadeira** na estrutura $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{L}$ se e somente se toda seqüência $\vec{a}$ de M satisfaz A. Isto é, $\mathfrak{M} \vDash A[\vec{a}]$ para toda sequência $\vec{a}$. Escrevemos $\mathfrak{M} \vDash A$.

19. Uma fórmula A de uma linguagem $\mathcal{L}$ é **falsa** na estrutura $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{L}$ se e somente se nenhuma seqüência $\vec{a}$ de M satisfaz A. Isto é, $\mathfrak{M} \nvDash A[\vec{a}]$ para toda sequência $\vec{a}$. Escrevemos $\mathfrak{M} \nvDash A$.

20. Uma fórmula fechada, sem variáveis livres, é sempre verdadeira ou falsa. Um conjunto de fórmulas Γ é **consistente** se existe uma fórmula A tal que $\Gamma \nvdash A$. Isto é, não se pode deduzir qualquer fórmula a partir de Γ.

21. Uma estrutura $\mathfrak{M}$ de uma linguagem $\mathcal{L}$ é um **modelo** para uma fórmula A em $\mathcal{L}$ se A é **verdadeira** em $\mathfrak{M}$. Escrevemos $\mathfrak{M} \vDash A$.

22. Uma estrutura $\mathfrak{M}$ de uma linguagem $\mathcal{L}$ é um **modelo** para um **conjunto** de fórmulas Γ em $\mathcal{L}$ se $\mathfrak{M}$ é modelo para cada uma das fórmulas de Γ.

23. Escrevemos $\Gamma \vDash A$ para indicar que A é verdade em todos os modelos do conjunto Γ.

24. Os axiomas das teorias de primeira ordem são verdadeiros em qualquer estrutura. Uma fórmula A de uma linguagem $\mathcal{L}$ é **logicamente válida** se e somente se ela é **verdadeira** em todas as estruturas de $\mathcal{L}$. Considere a fórmula A e um conjunto Γ de fórmulas de uma linguagem $\mathcal{L}$. Uma fórmula A é uma **conseqüência lógica** de um conjunto de fórmulas Γ se A é **verdadeira** em todos os modelos de Γ. Isto é, se $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ para certo modelo $\mathfrak{M}$, então $\mathfrak{M} \vDash A$. Escrevemos $\Gamma \vDash A$.

25. Considere uma linguagem $\mathcal{L}$. Os teoremas em $\mathcal{L}$ das teorias de primeira ordem são verdadeiros em qualquer estrutura de $\mathcal{L}$ (são logicamente válidos).

26. Teorema da Completude de Gödel: a) Um conjunto de fórmulas fechadas (sentenças) Γ em uma linguagem $\mathcal{L}$ é consistente se e somente se Γ tem modelo em $\mathcal{L}$ e b) Dado um conjunto de fórmulas fechadas Γ em uma linguagem $\mathcal{L}$, então $\Gamma \vDash A$ se e somente se $\Gamma \vdash A$.