Introdução à Lógica Matemática

José de Oliveira Guimarães
Departamento de Computação - UFSCar
São Carlos - SP

3 de agosto de 2008

Sumário

1 Introdução e História **2**

2 Sistemas Formais **5**

3 Conexões com a Computação e Introdução ao Cálculo Proposicional **9**

4 Semântica do Cálculo Proposicional **13**

5 Tabelas Verdade e Tautologias **17**

6 Proposições sobre Tautologias e Equivalências Lógicas **23**

7 Minimização de Fórmulas Lógicas **25**

8 Conjunto Adequado de Conectivos e Formas Normais **33**

9 Sintaxe do Cálculo Proposicional **38**

10 Relação Sintaxe/Semântica **41**

11 Circuitos Digitais **43**

12 Lógica de Primeira Ordem **46**

13 Semântica da Lógica de Primeira Ordem **52**

Unidade 1

Introdução e História

Atividades Individuais

Atividade 01. Cite três lógicas. Qual estudamos neste curso ? Por quê ?

R.: Lógica clássica, modal, paraconsistente, multivalorada, intuicionista, fuzzy, temporal, quântica, proposicional, lógica de primeira ordem. Estudamos neste curso a lógica matemática, pois é a base para a construção de computadores.

Atividade 02. Faça uma sentença que não é verdadeira nem falsa diferente das que foram apresentadas no texto.

R.: Sugestões:

a) A afirmação seguinte é falsa. A afirmação anterior é verdadeira.

b) A sua próxima resposta será não? Responda sim ou não.

c) Esta afirmação pertence ao conjunto que contém todas as afirmações falsas.

Atividade 03. . Por quê a frase "toda regra tem exceção" não é paradoxal ?

R.: Se a regra "Toda regra tem exceção"é verdadeira, então ela tem uma exceção e consequentemente a frase é falsa. Contradição. Mas se considerarmos esta frase falsa, nenhuma contradição aparece.

Atividades Coletivas

Atividade 01. Explique com suas palavras o paradoxo de Berry.

R.:

A paradoxo de Berry é um paradoxo semântico cujo desafio é encontrar O menor inteiro positivo que não é denotado por uma expressão, em algum idioma qualquer, contendo menos que n palavras.

Vamos supor que eu queira escrever um número por extenso. Por exemplo, "novecentos e trinta e um". Eu usei 3 palavras para escrever por extenso o número "931". Vamos supor agora que eu limite a quantidade de palavras que eu posso usar na frase. Vamos supor que eu só possa escrever tais frases com menos de 20 letras.

Neste "regra", vamos permitir escrever qualquer frase que represente um número. Por exemplo, se eu quiser representar o "625", eu posso escrever por extenso "seiscentos e vinte e cinco"ou de outra forma como "vinte e cinco ao quadrado"ou "vinte e cinco elevado à potência de dois". Note que na primeira frase eu usei 3 palavras, na terceira frase eu usei 3 e na última eu usei 5 palavras.

Os números são infinitos. Há vários deles que podemos expressar pelas mais diversas frases. Porém, como temos um número finito de palavras no português e um número finito de palavras que podemos usar na frase (menos de 20), uma hora nós chegaremos em um limite. Portanto, concluímos que há um número finito de inteiros definidos com frases com menos de 20 palavras.

Qual seria o maior número que a gente conseguiria representar através de frases com menos de 20 palavras? Não sabemos! Vamos chamá-lo, então, de K.

Qual seria o menor número inteiro que não pode ser definido com menos do que vinte palavras? Ou seja, qual é o número que vem depois de K? Não sabemos! Vamos chamá-lo de K+1.

Vamos tentar escrever o número "K+1"com alguma frase como vínhamos fazendo antes: "k mais um é o menor inteiro que não pode ser definido com menos do que vinte palavras". Como não pode ser definido com menos do que vinte palavras se acabamos de fazer isso? Caímos em uma contradição!

Atividade 02. Explique o paradoxo de Russel.

R.: O teorema de Russel prova por contradição que não existe o conjunto de todos os conjuntos que não contêm a si mesmo.

Se C é o conjunto de todos os conjuntos que não contêm a si mesmo, a qual conjunto ele pertenceria? Se ele pertencer a ele mesmo, ele está violando sua definição (contradição). Se ele não pertencer, então ele atende ao requisito necessário para pertencer a esta classe de conjuntos, contradizendo sua definição.

Atividade 03. (Opcional) Procure na Internet algo mais sobre a história da lógica. Alguns tópicos e personagens interessantes são:

1. lógica na idade média
2. Leibniz
3. Fregue
4. Gödel

5. Tarski

Unidade 2

Sistemas Formais

Atividades Individuais

Atividade 01. Explique o que é um sistema formal, axioma, regra de dedução, teorema e meta-teorema.

R.: Um sistema formal é composto por um conjunto de símbolos chamado de alfabeto, a definição do que é uma fórmula (as seqüências de símbolos do alfabeto que serão consideradas válidas), um subconjunto das fórmulas (os axiomas) e regras de dedução, que tomam um ou mais teoremas como entrada e produzem um teorema como saída. Um teorema é ou um axioma ou uma fórmula deduzida a partir das regras de dedução. Todo teorema deve ser uma fórmula. Um meta-teorema é um teorema sobre o próprio sistema formal em discução, cuja definição satisfaz todas os axiomas produzidos a partir de uma regra ou conjunto delas.

Atividade 02. Faça um sistema formal que utilize um alfabeto de pelo menos dez símbolos, tenha pelo menos cinco axiomas e pelo menos três regras de dedução.

R.:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, a, b, c, d, e\}$$

Regra 1 Se ax é um teorema, abx é um teorema

Regra 2 Se bx é um teorema, ba0x é um teorema

Regra 3 Se xby é um teorema, x3y é um teorema

Regra 4 Se x3y é um teorema, xdy é um teorema

Regra 5 Se xdy é um teorema, xyby é um teorema

O teorema dos itens 'a' e 'c' são deduzidos pela Regra 4. Os teoremas dos itens 'b', 'd' e 'e' são deduzidos pela Regra 5.

(a) 0 a0 (axioma)
1 ab0 (r1)
2 a30 (r3)
3 ab30 (r1)
4 abd0 (r4)

(b) 2. b1 (axioma)
2.1. 31 (r3)
2.2. d1 (r4)
2.3. 1b1 (r5)

(c) 3. cd3 (axioma)
3.1. c3b3 (r5)
3.2. c333 (r3)
3.3. cd33 (r4)
3.4. cdd3 (r4)
3.5. cddd (r4)

(d) 4. d2 (axioma)
4.1. 2b2 (r5)
4.2. 232 (r3)
4.3. 2d2 (r4)
4.4. 22b2 (r5)

(e) 5. a3 (axioma)
5.1. ad (r4)
5.2. abd (r1)
5.3. a3d (r3)
5.4. ab3d (r1)
5.5. ab3b (r5)

Atividade 03. Deduza o teorema

$\odot$ p $\odot\odot\odot$ q $\odot\odot\odot\odot$

no sistema pq.

R.:

1. $\odot$ p $\odot$ q $\odot$ $\odot$, axioma com x $=_{def} \odot$
2. $\odot$ p $\odot\odot$ q $\odot$ $\odot\odot$ pela regra
3. $\odot$ p $\odot\odot\odot$ q $\odot$ $\odot\odot\odot$ pela regra

Atividades Coletivas

Atividade 01. Faça um meta-teorema para o sistema MIU.

R.: Tendo como único axioma válido a combinação MI e o conjunto de regras apresentados, temos o seguinte meta-teorema:

[Meta-teorema] Todos os teoremas do tipo MxU possuem pelo menos uma letra I do alfabeto apresentado no sistema MIU.

A partir do teorema proposto MI, pode-se utilizar as regras 1 ou 2. Se utilizarmos R1, o meta-teorema é válido. Se aplicarmos R2, o meta-teorema continua sendo válido, pois ao receber um teorema qualquer, ele não altera o símbolo (letra) do fim da cadeia e não remove nenhum I. Se a seqüência terminar em U e iniciar com M (MxU), o meta-teorema continuará sendo válido. Em outras palavras, R2 multiplica por 2 o número de I's, U's e M's quem seguem o primeiro M, concatenando duas seqüências identicas dos símbolos que seguem o primeiro M do teorema de entrada.

R3 substitui 3 I's (III) por um U. Como o número de I's produzido por R2 é par (é a única que aumenta o número de I's) , sempre restará ao menos um I quando R3 for aplicada. Mais uma vez, ao ter U no final, o meta-teorema será válido.

R4 retira somente "UU", não manipulando I's. Desta forma esta regra não impede que qualquer teorema resultante dela, no formato MxU, não satisfaça o meta-teorema proposto.

Observação: implicitamente, a demostração do meta-teorema emprega indução finita. Seria melhor utilizá-la explicitamente.

Atividade 02. O sistema pq é capaz de representar a soma de dois números quaisquer ? Ou x, em "x p y q z", precisa ser maior do que y ?

R.: representa a soma de dois números quaisquer. O número de símbolos de x não precisa ser maior do que o número de símbolos de y. De fato, o axioma permite representar somas onde x é maior ou igual a y. E repetidas aplicações da regra permitem representar somas onde y é maior ou igual a x.

Atividade 03. Seja S o sistema formal que utiliza o alfabeto { E, T, N, $+$, $*$, 0, 1, ... 9 }. O único axioma é E e qualquer seqüência de símbolos é uma fórmula. As regras de dedução são:

1. Em um teorema qualquer, E pode ser substituído por $E + T$ ou T;
2. Em um teorema qualquer, T pode ser substituído por $T * N$ ou N;
3. Em um teorema qualquer, N pode ser substituído por 0 ou 1 ou ... ou 9.

Escreva alguns teoremas deste sistema formal. Alguns teoremas nunca poderão ser utilizados para a construção de outros teoremas, pois eles não possuem as letras E, T ou N. Com o que se parecem estes teoremas ?

R.:

(a)

a0	E (axioma)
a1	E+T (R1)
a2	E+T+T (R1)
a3	E+T+T+T (R1)
a4	T+T+T+T (R1)
a5	N+N+N+N (R2)
a6	1+3+5+6 (R3)

(b)

b0	E (axioma)
b1	T (R1)
b2	T*N (R2)
b3	T*N*N (R2)
b4	N*N*N (R2)
b5	5*6*3 (R3)

(c)

c0	E (axioma)
c1	E+T (R1)
c2	T+T (R1)
c3	T*N+T (R2)
c4	N*N+N (R2)
c5	2*6+1 (R3)

Os teoremas sem E, T ou N são somas e multiplicações de números entre 0 e 9 como “1 + 2*3”, “6*3*2 + 5 + 0*3”.

Unidade 3

Conexões com a Computação e Introdução ao Cálculo Proposicional

Atividades Individuais

Atividade 01. Explique o funcionamento de um autômato celular. As regras podem ser modificadas ou obrigatoriamente devem ser como definidas no texto ?

R.: Um autômato celular é um modelo discreto estudado na teoria da computação, em matemática, e em biologia teórica. Consiste de uma planilha infinita e regular de células, cada uma podendo estar em um número finito de estados, que variam de acordo com regras determinadas. E Também podemos criar nossas próprias regras para um autômato celular. O autômato celular mais famoso que existe é sem dúvida o jogo Life, inventado pelo matemático britânico John Horton Conway na década de 60. Neste jogo, cada célula tem dois estados: viva ou morta; a regra de evolução é bastante simples:

1. Se uma célula tiver menos do que 2 ou mais do que 3 vizinhas vivas, ela morre (ou de solidão ou de fome).
2. Se tiver 2 ou 3 vizinhas vivas ela se mantém viva.
3. Uma célula morta se torna viva se tiver exatamente 3 vizinhas.

Atividade 02. Remova o maior número possível de parênteses das seguintes fórmulas

$((A \wedge B) \longrightarrow (\neg(B) \longrightarrow (B \longrightarrow A)) \wedge C$

R.:

$$A \wedge B \longrightarrow (\neg B \longrightarrow (B \longrightarrow A)) \wedge C$$

$(((A \wedge B) {\longrightarrow} (\neg(B) {\longrightarrow} (B {\longrightarrow} A))) \wedge C)$

R.:

$$A \wedge B \longrightarrow (\neg B \longrightarrow (B \longrightarrow A)) \wedge C$$

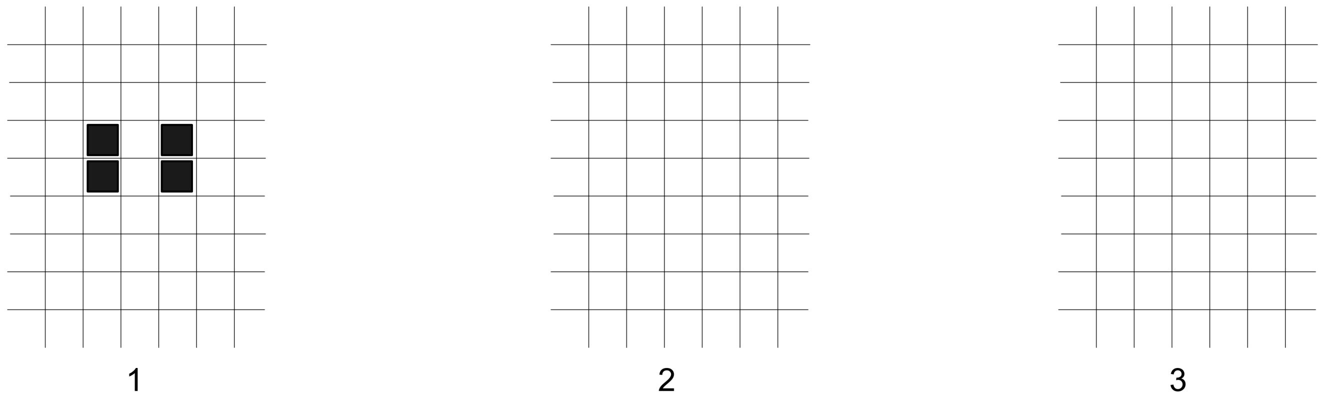

Figura 3.1: As células pretas desaparecem em uma geração

$(\neg A \longrightarrow (B \vee C)) \longleftrightarrow (((A \wedge B) \vee C) \longleftrightarrow A)$

R.:

$$(\neg A \longrightarrow B \vee C) \longleftrightarrow (A \wedge B) \vee C \longleftrightarrow A$$

$(A \wedge B) \wedge C$

R.:

$$A \wedge B \wedge C$$

$(A \vee B) \longleftrightarrow (A \longrightarrow \neg B)$

R.:

$$A \vee B \longleftrightarrow A \longrightarrow \neg B$$

Atividades Coletivas

Atividade 01. Faça configurações (que células são pretas?) para o jogo da vida de tal forma que as células pretas desapareçam:

(a) em uma única geração;

R.:

Veja a Figura 3.1.

(b) em duas gerações;

R.: Veja a Figura 3.2.

(c) em três gerações.

R.: Veja a Figura 3.3.

Atividade 02. Faça configurações (que células são pretas?) para o jogo da vida de tal forma que as cores das células nunca mudem.

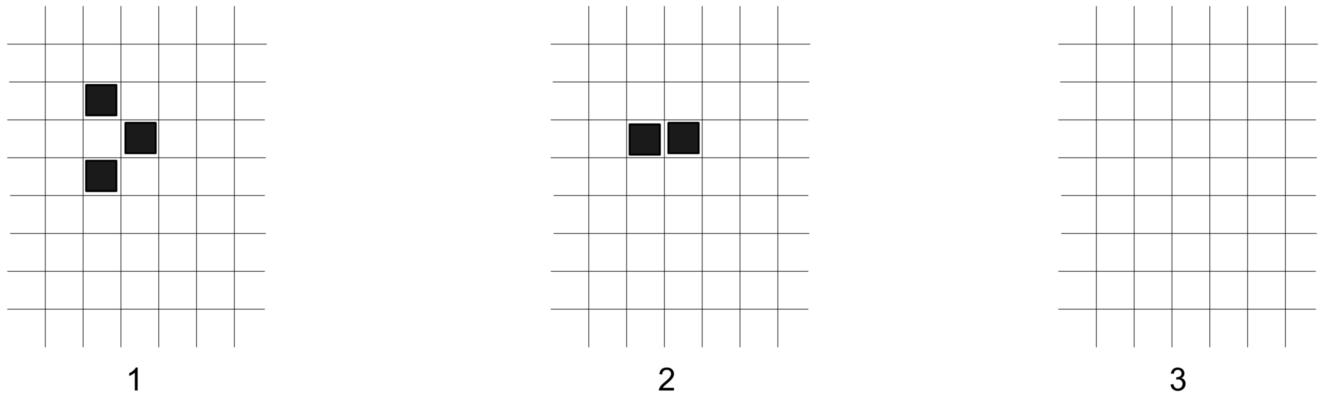

Figura 3.2: As células pretas desaparecem em duas gerações

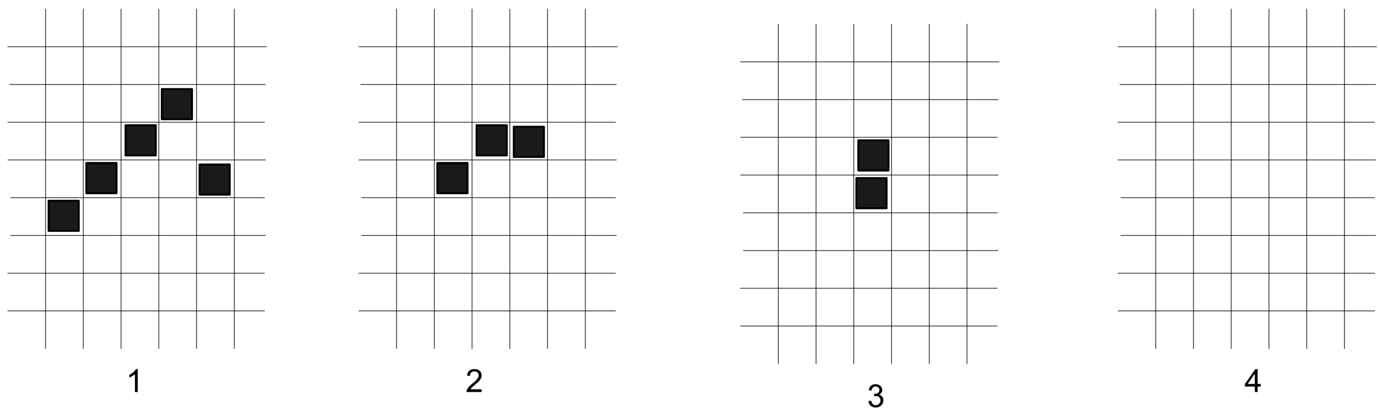

Figura 3.3: As células pretas desaparecem em três gerações

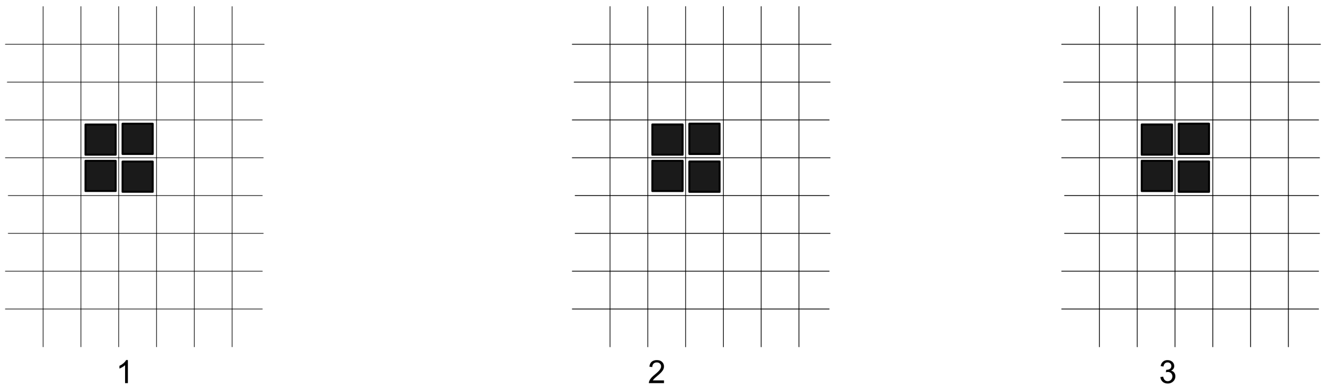

Figura 3.4: Jogo da vida em que as cores das células nunca mudam

R.: Veja a Figura 3.4.

Atividade 03. Quais seqüências de símbolos abaixo são fórmulas do CP ?

(a) $\neg\neg\neg\neg A \longrightarrow A \wedge \neg A$

  R.: É fórmula.

(b) $\vee \wedge ABA$

  R.: Não é fórmula.

(c) $((A_1 \longrightarrow A_2) \vee A_1$

  R.: Não é fórmula

Atividade 04. Os conectivos $\longleftrightarrow$, $\wedge$ e $\longrightarrow$ fazem parte da linguagem do CP ?

R.: Não. Eles não fazem parte do alfabeto do CP como definido no material escrito.

Atividade 05. Rigorosamente, é $A \vee B$ realmente uma fórmula do CP ? Explique o que é uma meta-fórmula.

R.: Não, $A \vee B$ não é uma fórmula. Os símbolos A e B sequer fazem parte da linguagem do CP. Contudo, por um abuso de linguagem, consideramos $A \vee B$ como fórmula válida. Uma meta-fórmula é um símbolo, como A ou B, que representa qualquer fórmula do CP.

Unidade 4

Semântica do Cálculo Proposicional

Atividades Individuais

Atividade 01. Faça as tabelas verdade de todos os conectivos básicos e derivados.

R.:

A	$\neg A$
V	F
F	V

A	B	$A \longrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	$A \longleftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Atividade 02. Podemos afirmar que, na Matemática, $(7 < 1) \longrightarrow (0 = 0)$? E $(7 < 1) \longrightarrow (0 = 1)$? Se sim, faça uma prova informal destes dois "teoremas".

R.: $7 < 1$ é falso. Logo, pela tabela verdade de $\longrightarrow$, $(7 < 1) \longrightarrow B$ é verdadeiro, qualquer que seja B.

Atividades Coletivas

Atividade 01. Converta as frases seguintes para fórmulas do cálculo proposicional. Escreva o que cada variável da fórmula significa.

(a) Este celular é um computador, câmera e um mp3 player ao mesmo tempo.

R.: $A \wedge B \wedge C$, onde:
A é Este celular é um computador
B é Este celular é uma câmera
C é Este celular é um mp3 player

(b) Se o preço do carro estiver bom, levaremos dois.

R.: $A \longrightarrow B$, onde:
A é o preço do carro está bom
B é Levaremos 2

(c) Uma de duas coisas acontecerá: se ele for bom, resolverá o problema. E se ele não for bom, contratará alguém para resolvê-lo.

R.: $(A \longrightarrow B) \vee (\neg A \longrightarrow C)$, onde:
A é ele é bom

B é Ele resolverá o problema
C é Ele contratará alguém para resolve-lo

(d) Ele é chato mas inteligente.

R.: $A \wedge B$, onde:
A é Ele é chato
B é Ele é inteligente

(e) Ele é engenheiro ou analista de sistemas. E é competente.

R.: $(A \vee B) \wedge C$, onde:
A é Ele é engenheiro
B é Ele é analista de sistemas
C é Ele é competente

(f) O número é maior do que zero, ímpar, mas não é primo.

R.: $(A \wedge B) \wedge \neg C$, onde:
A é O número é maior do que zero
B é O número é impar
C é O número é primo

(g) Se o número é primo, ele não é divisível por quatro mas pode ser divisível por 3 e pode ser divisível por 2.

R.: $A \longrightarrow (B \wedge (C \wedge D))$, onde:
A é O número é primo
B é O número não é divisível por quatro
C é O número pode ser divisível por três
D é O número pode ser divisível por dois

(h) Uma figura de quatro lados é um quadrado se todos os lados são do mesmo tamanho e todos os ângulos entre os lados são iguais.

R.: $A \longleftrightarrow (B \wedge C)$, onde:
A é Uma figura de quatro lados é um quadrado
B é Todos os lados são do mesmo tamanho
C é Todos os ângulos entre os lados são iguais

Atividade 02. A sentença “Se a terra é quadrada então o mar é lilás ou o céu é verde”é verdadeira na lógica que estudamos? Isto quer dizer que o mar é lilás? Ou que o céu é verde?

R.: não. Podemos mapear a frase acima para $A \longrightarrow B \wedge C$ onde A, B e C são “A terra é quadrada”, “o mar é lilás” e “o céu é verde”, respectivamente. Como a frase A é falsa (considerando os nossos conhecimentos do mundo), pela definição de $\longrightarrow$ da lógica matemática temos que a fórmula $A \longrightarrow B \wedge C$ é verdadeira. Mas nada podemos afirmar quanto à veracidade de B e C.

Unidade 5

Tabelas Verdade e Tautologias

Atividades Individuais

Atividade 01. Usando tabelas verdade, prove que as fórmulas seguintes são tautologias.

(a) $\neg\neg A \longleftrightarrow A$

(b) $(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (\neg A \vee B)$

(c) $\neg(A \wedge \neg A)$

(d) $(((A \vee B) \wedge (\neg B)) \longrightarrow A)$

(e) $A \wedge B \longrightarrow A$

(f) $A \longrightarrow (A \wedge A)$

(g) $\neg C \vee (A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$

(h) $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longleftrightarrow (A \wedge B \longrightarrow C)$

R.:

(a)

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$\neg\neg A \longleftrightarrow A$
V	F	V	V
F	V	F	V

(b)

A	B	$A \longrightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (\neg A \vee B)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

(c)

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)A$
V	F	F	V
F	V	F	V

(d)

A	B	$A \vee B$	$\neg B$	$(A \vee B) \wedge (\neg B)$	$(((A \vee B) \wedge (\neg B)) \longrightarrow A)$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

(e)

A	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \longrightarrow A$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

(f)

A	$A \wedge A$	$A \longrightarrow (A \wedge A)$
V	V	V
F	F	V

(g)

A	B	C	$\neg C$	$B \longrightarrow C$	$A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$	$\neg C \vee (A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

(h) Considere $\varphi =_{def} (A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longleftrightarrow (A \wedge B \longrightarrow C)$

A	B	C	$B \longrightarrow C$	$A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$	$A \wedge B$	$A \wedge B \longrightarrow C$	φ
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Atividade 02. Explique: a tabela verdade dada abaixo na verdade representa infinitas tabelas

verdade.

A	$\neg A$
V	F
F	V

R.: Essa tabela verdade vale para qualquer fórmula que substitua A. Se A for verdadeira, ¬ A será falsa. Se A for falsa, ¬ A será verdadeira.

Atividade 03. Escreva a tabela verdade do "ou" exclusivo, cujo símbolo é $\oplus$. Considere que $A \oplus B$ é verdadeiro se apenas A ou apenas B é verdadeiro.

R.:

A	B	$A \oplus B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Atividade 04. Defina tautologia e contradição.

R.: Tautologia: Uma fórmula A é uma tautologia se A assume o valor V qualquer que sejam os valores atribuídos às variáveis que aparecem em A.

Contradição: Uma fórmula A é uma contradição se A assume o valor F qualquer que sejam os valores atribuídos às variáveis que aparecem em A. Isto é, $\neg A$ é contradição.

Atividade 0. 5. Defina explicitamente a função de verdade correspondente à seguinte tabela verdade:

A	B	C	R
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

R.:

$$f(A,B,C) = \begin{cases} V & \text{se } A = C \\ F & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Atividade 0. 6. Encontre uma fórmula lógica correspondente à seguinte função de verdade:

$$f(A, B, C) = \begin{cases} V & \text{se } A = B = C \\ F & \text{caso contrário} \end{cases}$$

R.:

$$(A \longleftrightarrow B) \wedge (A \longleftrightarrow C)$$

Atividades Coletivas

Atividade 01. Encontre fórmulas correspondentes às seguintes tabelas verdade:

(a)

A	B	C	?
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

(b)

A	B	C	?
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

R.:

(a) Há pelo menos duas respostas possíveis:

- $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
- $A \vee \neg B \vee \neg C$

(b)
- $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
- $(C \wedge (A \vee B)) \vee (\neg B \wedge (A \vee B))$

Atividade 02. Construa a tabela verdade para as fórmulas seguintes.

(a) $(A \longrightarrow B) \wedge (A \longleftrightarrow B)$

(b) $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow B))$

(c) $\neg(A \longrightarrow B \vee \neg C)$

(d) $(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

(d) $(A \longleftrightarrow B) \longrightarrow \neg A$

(e) $(A \longrightarrow B \longrightarrow A) \longrightarrow B$

R.:

(a)

A	B	$A \longrightarrow B$	$A \longleftrightarrow B$	$(A \longrightarrow B) \wedge (A \longleftrightarrow B)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

(b) Considere $\varphi =_{def} (A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow B))$

A	B	C	$B \longrightarrow C$	$A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$	$A \longrightarrow B$	$(A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow B)$	φ
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

(c)

A	B	C	$\neg C$	$B \vee \neg C$	$A \longrightarrow B \vee \neg C$	$\neg(A \longrightarrow B \vee \neg C)$
V	V	V	F	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F

(d)

A	B	$A \longrightarrow B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

(e)

A	B	$\neg A$	$A \longleftrightarrow B$	$(A \longleftrightarrow B) \longrightarrow \neg A$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V

(f)

A	B	$A \longrightarrow B$	$A \longrightarrow B \longrightarrow A$	$(A \longrightarrow B \longrightarrow A) \longrightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Atividade 03. Represente $A {\longrightarrow} B$ e $A {\longleftrightarrow} B$ utilizando apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.

R.:

$A \longrightarrow B$ pode ser escrito como $\neg(A \wedge \neg B)$ ou $\neg A \vee B$.

$A \longleftrightarrow B$ pode ser escrito como $(A \wedge B) \vee (\neg(A \vee B))$

Unidade 6

Proposições sobre Tautologias e Equivalências Lógicas

Atividades Individuais

Atividade 01. Considerando que $(A \longrightarrow B)$ é logicamente equivalente a $(\neg A \vee B)$, então a fórmula

$$C \wedge ((A \longrightarrow B) \longleftrightarrow C)$$

é logicamente equivalente à fórmula

$$C \wedge ((\neg A \vee B) \longleftrightarrow C)?$$

Qual proposição garante isto?

R.: A proposição 6.4,

Considere A uma fórmula dentro da qual há uma ou mais ocorrências de uma sub-fórmula B. Seja A' a fórmula obtida a partir de A pela troca de uma ou mais ocorrências de B por B'. Então

$$(B \longleftrightarrow B') \longrightarrow (A \longleftrightarrow A')$$

é uma tautologia.

Como $A \longrightarrow B \equiv \neg A \vee B$, então $C \wedge ((A \longrightarrow B) \longleftrightarrow C) \equiv C \wedge ((\neg A \vee B) \longleftrightarrow C)$.

Atividade 02. Prove que as seguintes fórmulas são logicamente equivalentes.

(a) $A \longrightarrow ((B \wedge \neg D) \longrightarrow C)$ e $(A \wedge (\neg D \wedge B)) \longrightarrow C$

R.: $A \longrightarrow ((B \wedge \neg D) \longrightarrow C) \equiv$
$(A \wedge (B \wedge \neg D)) \longrightarrow C \equiv$ (pelo Lema 6.1 (a))
$(A \wedge (\neg D \wedge B)) \longrightarrow C$ (pelo Lema 6.1 (n))

(b) $A \vee (\neg B \wedge \neg C)$ e $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee A)$

R.: $A \vee (\neg B \wedge \neg C) \equiv$

$(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C) \equiv$ (pelo Lema 6.1 (c))
$(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee A)$ (pelo Lema 6.1 (o))

(c) $(B \vee \neg C) \wedge ((B \vee \neg C) \vee B)$ e $(B \vee \neg C)$

R.: $(B \vee \neg C) \wedge ((B \vee \neg C) \vee B) \equiv$
$B \vee \neg C$ (pelo Lema 6.1 (m))

Atividade 03. É $V_1 \wedge V_2$ uma conseqüência lógica do conjunto $\{V_1 \longrightarrow (V_2 \vee V_1), V_1 \longleftrightarrow \neg V_2, (V_1 \wedge \neg V_2) \longrightarrow (V_2 \longrightarrow \neg V_1)\}$?

Atividade 04. Prove: se $A \wedge B$ é tautologia, então A e B são tautologias.

R.: Suponha que $A \wedge B$ seja tautologia e A não o seja. Como A não é tautologia, então existe uma seqüência s que não a satisfaz. Então $A \wedge B$ não é tautologia. Contradição.

Em outras palavras, se fizermos a tabela verdade de $A \wedge B$ e A, lado a lado, há uma linha da tabela verdade em que A é falso e, portanto, nesta linha, $A \wedge B$ é falso. Contradição, pois assumimos que $A \wedge B$ é tautologia.

Atividades Coletivas

Atividade 01. Dada a fórmula $A \longrightarrow B$ podemos dizer que A implica logicamente B? Dada a fórmula $A \longleftrightarrow B$ podemos dizer que A é logicamente equivalente a B?

R.: se $A \longrightarrow B$ é tautologia, então A implica logicamente B. Mas simplesmente dada a fórmula $A \longrightarrow B$, nada podemos afirmar. O mesmo raciocínio se aplica a $A \longleftrightarrow B$.

Atividade 02. Prove que as seguintes fórmulas são logicamente equivalentes.

(a) $((C_1 \wedge D_2) \vee (A_1 \longrightarrow A_2)) \wedge \neg(A_1 \longrightarrow A_2)$ e $(C_1 \wedge D_2) \wedge (A_1 \wedge \neg A_2)$

(b) $((\neg D \longrightarrow D \wedge \neg B) \wedge D) \vee D$ e D

Unidade 7

Minimização de Fórmulas Lógicas

Atividades Individuais

Atividade 01. Simplifique as seguintes fórmulas

(a) $(A \vee B) \wedge \neg B \longrightarrow A$

(b) $\neg\neg A \longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee \neg A)$

(c) $\neg(A \wedge \neg B) \vee (A \longrightarrow B)$

(d) $\neg((A \longrightarrow \neg B) \wedge \neg(A \wedge C))$

R.:

(a) $(A \vee B) \wedge \neg B \longrightarrow A$
pelo lema 6.1.c (regra distributiva) temos que
$A \wedge \neg B \vee B \wedge \neg B \longrightarrow A$
sabendo-se que $(B \wedge \neg B) \equiv \perp$
e que $(A \wedge \neg B \vee \perp) \equiv (A \wedge \neg B)$ pelo lema 6.2.4, temos
$(A \wedge \neg B) \longrightarrow A$
onde aplicamos a definição de conectivos derivados
$\neg(A \wedge \neg B) \vee A$
pelo lema 6.1.k (De Morgan) temos que
$\neg A \vee B \vee A$
que é equivalente a
$\neg A \vee A \vee B$
como $\neg A \vee A$ é uma tautologia, pelo Lema 6.2 (2), ficamos com
$\neg A \vee A$

(b) $\neg\neg A \longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee \neg A)$
pela definição de dupla negação temos que

$A \longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee \neg A)$
pelo lema 6.1.c (regra distributiva) temos que
$A \longleftrightarrow ((\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee B))$
onde temos uma tautologia $\top$
$A \longleftrightarrow (T \wedge (\neg A \vee B))$
pelo lema 6.2.1 temos que
$A \longleftrightarrow (\neg A \vee B)$
considerando $C \equiv A$ e D $\equiv (\neg A \vee B)$
e sabendo que $(C \longleftrightarrow D) \equiv (C \wedge D) \vee (\neg C \wedge \neg D)$
pelo lema 6.1.i (Conectivos Derivados) temos que
$(A \wedge (\neg A \vee B)) \vee (\neg A \wedge \neg(\neg A \vee B))$
pelo lema 6.1.j (De Morgan) temos que
$(A \wedge (\neg A \vee B)) \vee (\neg A \wedge (A \wedge B))$
pelo lema 6.1.b (regra distributiva) temos que
$(A \wedge \neg A \vee A \wedge B) \vee (\neg A \wedge (A \wedge B))$
pelo lema 6.1.b (regra distributiva) temos que
$(A \wedge \neg A \vee A \wedge B) \vee (\neg A \wedge A \wedge \neg A \wedge \neg B))$
sabendo-se que $(\neg A \wedge A) \equiv \perp$ tem-se
$(A \wedge \neg A \vee A \wedge B) \vee (\perp \wedge \neg A \wedge \neg B))$
sabemos pelo lema 6.2.3 que $(\perp \wedge \neg A) \equiv \perp$ então
$(A \wedge \neg A \vee A \wedge B) \vee (\perp \wedge \neg B))$
sabemos pelo lema 6.2.3 que $(\perp \wedge \neg B) \equiv \perp$ então
$(A \wedge \neg A \vee A \wedge B) \vee \perp$
supondo X $\equiv (A \wedge \neg A \vee A \wedge B)$
e sabendo pelo lema 6.2.4 que $(X \vee \perp) \equiv X$ então temos
$(A \wedge \neg A \vee A \wedge B)$
sabendo-se que $(\neg A \wedge A) \equiv \perp$ tem-se
$(\perp \vee A \wedge B)$
supondo $X \equiv (A \wedge B)$
e sabendo, pelo lema 6.2.4, que $(X \vee \perp) \equiv X$ então tem-se
$A \wedge B$

(c) $\neg(A \wedge \neg B) \vee (A \longrightarrow B)$
pelo lema 6.1.k (De Morgan) temos que
$(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee B)$
supondo $X \equiv (\neg A \vee B)$
e sabendo que $(X \vee X) \equiv X$ temos
$(\neg A \vee B)$
que pela definição D2, de conectivos derivados é logicamente equivalente a
$A \longrightarrow B$

(d) $\neg((A \longrightarrow \neg B) \wedge \neg(A \wedge C)) \equiv$
$\neg(A \longrightarrow \neg B) \vee \neg\neg(A \wedge C) \equiv$ (pois $\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$)
$\neg(A \longrightarrow \neg B) \vee (A \wedge C) \equiv$ (pois $\neg\neg X \equiv X$)
$\neg(\neg A \vee \neg B) \vee (A \wedge C) \equiv$ (pois $X \longrightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$)

$(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \vee (A \wedge C) \equiv$ (pois $\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$)
$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \equiv$ (pois $\neg\neg X \equiv X$)
$A \wedge (B \vee C)$ (pelo Lema 6.1 (b))

Atividade 02. Simplifique os seguintes comandos:

(a)
```
while not (f(n) = 0) and not found and isSet = false do
    begin
    comandos
    end
```

R.: Usando $A =_{def}$ `f(n) = 0`, $B =_{def}$ `found` e $C =_{def}$ `isSet`, temos $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$, que é $\neg(A \vee B \vee C)$:

```
while not (f(n) = 0) or found or isSet) do
   begin
   comandos
   end
```

Observação: nem sempre uma fórmula menor é mais legível para o programador. E algumas pessoas irão achar a expressão booleana original mais legível do que esta.

(b)
```
if search(p) = -1 or found
then
   if not found
   then
      writeln('tudo bem');
```

R.:

Usando $A =_{def}$ `search(p) = -1` e $B =_{def}$ `found`, temos $(A \vee B) \wedge \neg B$, que é $A \wedge \neg B$ pelo Lema 6.1 (e). Então podemos reescrever o código como

```
if search(p) = -1 and not found
then
   writeln('tudo bem');
```

(c)
```
if ok or not found
then
   if not ok
   then
      P
   else if ok and not found
        then
           Q;
        else
```

```
R;
```

R.:

Usando $A =_{def}$ `ok` e $B =_{def}$ `found`, temos que para `P`, `Q` e `R` serem executados temos que ter:

1. P:
   $(A \vee \neg B) \wedge \neg A \equiv$
   $(\neg B \vee A) \wedge \neg A \equiv$ (Lema 6.1 (o))
   $\neg B \wedge \neg A$ (Lema 6.1 (e))

2. Q:
   $(A \vee \neg B) \wedge A \wedge (A \wedge \neg B) \equiv$
   $(A \vee \neg B) \wedge (A \wedge A) \wedge \neg B \equiv$ (Lema 6.1 (p))
   $(A \vee \neg B) \wedge A \wedge \neg B \equiv$ (pois $A \equiv A \wedge A$)
   $A \wedge (A \vee \neg B) \wedge \neg B \equiv$ (Lema 6.1 (n))
   $A \wedge \neg B$ (Lema 6.1 (m))

3. R:
   $(A \vee \neg B) \wedge A \wedge \neg(A \wedge \neg B)$
   $A \wedge (A \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge \neg B)$ (Lema 6.1 (n))
   $A \wedge \neg(A \wedge \neg B)$ (Lema 6.1 (m))
   $A \wedge (\neg A \vee \neg\neg B)$ (Lema 6.1 (k))
   $A \wedge (\neg A \vee B)$ (pois $X \equiv \neg\neg X$)
   $(\neg A \vee B) \wedge A$ (pelo Lema 6.1 (n))
   $(B \vee \neg A) \wedge A$ (pelo Lema 6.1 (o))
   $(B \vee \neg A) \wedge \neg(\neg A)$ (pois $Xequiv\neg\neg X$)
   $B \wedge \neg\neg A$ (Lema 6.1 (e))
   $B \wedge A$ (pois $Xequiv\neg\neg X$)

```
if ok
then
   if found
   then
      R
   else
      Q;
else
   if not found
   then
      P
```

Atividades Coletivas

Atividade 01. Simplifique as seguintes fórmulas

(a) $A \vee B \longrightarrow B$

(b) $(A \vee A) \wedge (B \longrightarrow B)$

(c) $(A \longrightarrow A \longrightarrow A) \longrightarrow A$

(d) $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow A \wedge B$

R.:

(a) $A \vee B \longrightarrow B$
se substituirmos $A \vee B$ por C teremos
$C \longrightarrow B$
que pela definição D2 de conectivos derivados ($(X \vee Y)$ é $(\neg X) \longrightarrow Y$) equivale a
$\neg C \vee B$
substituindo C pelo seu valor original
$\neg(A \vee B) \vee B$
aplicando a lei de De Morgan, lema 6.1.j, temos
$(\neg A \neg B) \vee B$
pelo lema 6.1.c (regra distributiva) temos que
$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee B)$
por definição $(\neg B \vee B) \equiv \top$ então temos
$(\neg A \vee B) \wedge \top$
supondo $X \equiv \neg A \vee B$
e sabendo pelo lema 6.2.1 que $X \wedge \top \equiv X$ temos
$\neg A \vee B$
que pela definição D2 de conectivos derivado equivale a
$A \longrightarrow B$

(b) $(A \vee A) \wedge (B \longrightarrow B)$
por definição $(A \vee A) \equiv A$ então
$A \wedge (B \longrightarrow B)$
que pela definição D2 de conectivos derivados ($(X \vee Y)$ é $(\neg X) \longrightarrow Y$) equivale a
$A \wedge (\neg B \vee B)$
por definição $(\neg B \vee B) \equiv \top$ então temos
$A \wedge T$
que pelo lema 6.2.1 equivale a

A

(c) $(A \longrightarrow A \longrightarrow A) \longrightarrow A$

Há duas possiblidades para esta fórmula: A assume V ou F.
Pela definição de implicação sempre que uma variável implicar nela mesma (valores iguais) temos uma Tautologia.
Assim:
$(A \longrightarrow A \longrightarrow A) \longrightarrow A \equiv T$

(d) $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow A \wedge B$

pela definição D2 de conectivos derivados ($(X \vee Y)$ é $(\neg X) \longrightarrow Y$) temos
$(A \longrightarrow (\neg B \vee C)) \longrightarrow A \wedge B$
pela definição D2 de conectivos derivados temos
$(\neg A \vee (\neg B \vee C)) \longrightarrow A \wedge B$
pelo lema 6.1.c (regra distributiva) temos que
$(\neg A \vee \neg B) \vee (\neg A \vee C) \longrightarrow A \wedge B$
pela definição D2 de conectivos derivados temos
$\neg((\neg A \vee \neg B) \vee (\neg A \vee C)) \vee (A \wedge B)$
aplicando a lei de De Morgan, lema 6.1.j, temos
$(\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee C)) \vee (A \wedge B)$
aplicando a lei de De Morgan, lema 6.1.j, temos
$A \wedge B \wedge A \wedge C \vee (A \wedge B)$
que por precedência de operadores equivale a
$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B)$
que é equivalente a
$((A \wedge B) \wedge C) \vee (A \wedge B)$
que é equivalente a
$(A \wedge B) \vee ((A \wedge B) \wedge C)$
mas pelo Lema 6.1 (l), esta fórmula é equivalente a
$A \wedge B$

Atividade 02. Partindo da fórmula $A \longrightarrow B$, produza uma fórmula logicamente equivalente com pelo menos seis conectivos e uma variável C a mais.

R.: Aplicando em $A \longrightarrow B$ a regra de conectivos derivados temos:
$\neg A \vee B$
Aplicando a lei de De Morgan, pelo lema 6.1.k:
$\neg(A \wedge \neg B)$
Sabendo-se que $X \vee F$ resulta em X, e que $X \wedge \neg X$ é F, tem-se:
$\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg C \vee C)$

Atividade 03. Prove que $\neg(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n)$ é logicamente equivalente a $\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge ... \wedge \neg A_n$ utilizando indução finita em n.

R.:

Usaremos indução finita (veja o Apêndice B). O caso base é $n = 1$, trivial:

$\neg(A_1)$ é logicamente equivalente a $\neg A_1$

Utilizaremos $\equiv$ para representar equivalência lógica. Então escrevemos

$\neg(A_1) \equiv \neg A_1$

A hipótese de indução (HI) é

$\neg(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{n-1}) \equiv \neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge ... \wedge \neg A_{n-1}$

Queremos provar que

$\neg(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \equiv \neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge ... \wedge \neg A_n$

Temos que

$\neg(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{n-1} \vee A_n) \equiv \neg((A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{n-1}) \vee A_n) \equiv \neg(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{n-1}) \wedge \neg A_n$

Neste último passo, utilizamos o Lema 6.1 (j). Continuando,

$\neg(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{n-1}) \wedge \neg A_n \equiv (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge ... \wedge \neg A_{n-1}) \wedge \neg A_n$

pela HI, que é logicamente equivalente a

$\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge ... \wedge \neg A_{n-1} \wedge \neg A_n$

Atividade 04. Prove que $A_1 \longrightarrow (A_2 \longrightarrow (A_3 \longrightarrow \ldots (\longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow (A_n \longrightarrow B)) \ldots)$ é logicamente equivalente a $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \longrightarrow B$.

R.:

Para simplificar a prova, trocaremos os índices: provaremos que
$A_n \longrightarrow (A_{n-1} \longrightarrow (A_{n-2} \longrightarrow \ldots (\longrightarrow A_2 \longrightarrow (A_1 \longrightarrow B)) \ldots)$
é logicamente equivalente a $A_n \wedge A_{n-1} \wedge \ldots \wedge A_1 \longrightarrow B$.

O caso base é $n = 1$:

$(A_1 \longrightarrow B)$ é logicamente equivalente a $A_1 \longrightarrow B$

Trivial. Utilizaremos $\equiv$ para "logicamente equivalente", como no exercício anterior.

A hipótese de indução é

$(A_{n-1} \longrightarrow (A_{n-2} \longrightarrow \ldots (\longrightarrow A_2 \longrightarrow (A_1 \longrightarrow B)) \ldots) \equiv A_{n-1} \wedge \ldots \wedge A_1 \longrightarrow B$

Utilizando a HI, temos que

$A_n \longrightarrow (A_{n-1} \longrightarrow (A_{n-2} \longrightarrow \ldots (\longrightarrow A_2 \longrightarrow (A_1 \longrightarrow B)) \ldots) \equiv A_n \longrightarrow (A_{n-1} \wedge \ldots \wedge A_1 \longrightarrow B)$

Pela definição de $\longrightarrow$, temos

$A_n \longrightarrow (A_{n-1} \wedge \ldots \wedge A_1 \longrightarrow B) \equiv \neg A_n \vee (A_{n-1} \wedge \ldots \wedge A_1 \longrightarrow B)$

Utilizando a definição de $\longrightarrow$ com $A_{n-1} \wedge \ldots \wedge A_1 \longrightarrow B$, temos

$$\neg A_n \vee (A_{n-1} \wedge \ldots \wedge A_1 \longrightarrow B) \equiv$$
$$\neg A_n \vee (\neg(A_{n-1} \wedge \ldots \wedge A_1) \vee B) \equiv$$
$$\neg A_n \vee (\neg A_{n-1} \vee \ldots \vee \neg A_1 \vee B) \equiv$$
$$\neg A_n \vee \neg A_{n-1} \ldots \vee \neg A_1 \vee B \equiv$$
$$\neg(A_n \wedge A_{n-1} \ldots \wedge A_1) \vee B \equiv$$
$$A_n \wedge A_{n-1} \ldots \wedge A_1 \longrightarrow B$$

Então
$A_n \longrightarrow (A_{n-1} \longrightarrow (A_{n-2} \longrightarrow \ldots (\longrightarrow A_2 \longrightarrow (A_1 \longrightarrow B)) \ldots) \equiv$
$A_n \wedge A_{n-1} \ldots \wedge A_1 \longrightarrow B$

Note que utilizamos o resultado do exercício anterior ao fazer uma das equivalências lógicas.

Unidade 8

Conjunto Adequado de Conectivos e Formas Normais

Atividades Individuais

Atividade 01. Quais das fórmulas abaixo estão na FNC ? E na FND ?

(a) V_1

(b) $V_5 \vee (V_1 \wedge \neg V_3 \wedge \neg V_5) \vee \neg V_2$

(c) $A \vee \neg B$, onde A e B são meta-variáveis. Esta é uma fórmula ?

R.:

(a) V_1 está na FND e FNC;

(b) $V_5 \vee (V_1 \wedge \neg V_3 \wedge \neg V_5) \vee \neg V_2$ está na FND;

(c) $A \vee \neg B$, onde A e B são meta-variáveis, está na FND e FNC.

Atividade 02. Explique como se encontra uma fórmula na FNC que corresponde a uma certa tabela verdade.

R.: De acordo com a **Proposição 8.7**, sabemos que toda fórmula correponde a uma fórmula na FNC. Isto pode ser facilmente provado. Suponhamos que $V_1, V_2, ...V_n$ são exatamente todas as variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula (doravante chamada de φ). De acordo com a **Seção 5.3**, sabemos que podemos construir a tabela verdade de φ utilizando apenas as variáveis $V_1, V_2, ...V_n$. Se φ é uma tautologia, simplesmente definimos

$$\psi = \bigwedge_{j=1}^{n} (V_j \vee \neg V_j)$$

Claramente ψ está na FNC e é uma tautologia. Se φ não é uma tautologia, dentre as 2^n linhas da tabela verdade, escolha apenas as linhas em que φ recebe o valor F (deve existir ao menos uma, visto que φ não é tautologia). Chamemos de $L_1, ...L_k$ as linhas em que φ vale F (note que $1 \leq k \leq 2^n$). Para cada linha L_i, defina os seguintes literais[1]:

$$\varphi_j^i = \begin{cases} \neg V_j, & \text{se} \quad V_j \text{ recebe o valor V na linha } L_i \\ V_j, & \text{se} \quad V_j \text{ recebe o valor F na linha } L_i \end{cases}$$

Considere agora, para cada $i = 1, ...k$ a disjunção $\varphi_i = \bigvee_{j=1}^{n} \varphi_j^i$. Finalmente, definimos

$$\psi = \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i$$

Vale notar que o procedimento acima nada mais faz do que encontrar a $\neg FND(\neg\varphi)$.

Atividade 03. Encontre uma fórmula na FNC que seja logicamente equivalente à fórmula $(A \longrightarrow B) \wedge (\neg B \vee C)$, onde A, B e C são meta-variáveis.

R.: Construímos a tabela verdade da fórmula, a ser chamada de φ:

A	B	C	$\neg B$	$A \to B$	$\neg B \vee C$	φ	
F	F	F	V	V	V	V	
F	F	V	V	V	V	V	
F	V	F	F	V	F	F	L_1
F	V	V	F	V	V	V	
V	F	F	V	F	V	F	L_2
V	F	V	V	F	V	F	L_3
V	V	F	F	V	F	F	L_4
V	V	V	F	V	V	V	

Temos que as linhas relevantes são L_1 (a terceira), L_2 (a quinta), L_3 (a sexta) e L_4 (a sétima). Definimos, para cada uma delas, as seguintes disjunções:

1. Para L_1: $\varphi_1 = (A \vee \neg B \vee C)$
2. Para L_1: $\varphi_1 = (\neg A \vee B \vee C)$
3. Para L_1: $\varphi_1 = (\neg A \vee B \vee \neg C)$
4. Para L_1: $\varphi_1 = (\neg A \vee \neg B \vee C)$

Finalmente, definimos $\psi = \bigwedge_{i=1}^{4} \varphi_i$, isto é, $(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$ como sendo uma FNC para φ.

Atividade 04. Encontre uma fórmula na FND correspondente à seguinte tabela verdade, onde

[1] um literal é uma fórmula da forma V_1 ou $\neg V_1$, para algum V_1

A, B e C são meta-variáveis.:

A	B	C	?
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

R.: O procedimento para tanto nos é dado no exemplo à seção 8.3. Vale lembrar que caso a fórmula a qual queremos encontrar a FND for uma contradição e, portanto, não tivermos qualquer linha que assume o valor V em sua tabela, basta definirmos a FND como sendo

$$\bigvee_{j=1}^{n}(V_i \wedge \neg V_i)$$

sendo $V_1, ...V_n$ exatamente todas as variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula.

Para a tabela presente no exercício, temos a seguinte fórmula na FND que a representa: $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

Atividade 05. Encontre uma fórmula na FNC e outra na FND correspondente à seguinte tabela verdade, onde A e B são meta-variáveis.:

A	B	?
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

R.: FNC: $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
FND: $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Atividades Coletivas

Atividade 01. Quais das fórmulas abaixo estão na FNC ? E na FND ?

(a) $(\neg V_1 \wedge V_2) \vee V_5 \wedge V_1$

(b) $V_1 \wedge B$, B uma meta-variável. Esta é uma fórmula ?

(c) $(\neg\neg V_1 \wedge V_2) \vee (\neg V_2 \wedge V_3)$

R.:

(a) FND;

(b) FND e FNC;

(c) FND.

Atividade 02. Explique como se encontra uma fórmula na FND que corresponde a uma certa tabela verdade.

R.: De acordo com a **Proposição 8.6**, sabemos que toda fórmula correponde a uma fórmula na FND. Isto pode ser facilmente provado. Suponhamos que $V_1, V_2, ...V_n$ são exatamente todas as variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula (doravante chamada de φ). De acordo com a **Seção 5.3**, sabemos que podemos construir a tabela verdade de φ utilizando apenas as variáveis $V_1, V_2, ...V_n$. Se φ é uma contradição, simplesmente definimos

$$\bigvee_{j=1}^{n} (V_i \wedge \neg V_i)$$

Claramente ψ está na FND e é uma contradição. Se φ não é uma contradição, dentre as 2^n linhas da tabela verdade, escolha apenas as linhas em que φ recebe o valor V (deve existir ao menos uma, visto que φ não é contradição). Chamemos de $L_1, ...L_k$ as linhas em que φ vale V (note que $1 \leq k \leq 2^n$). Para cada linha L_i, defina os seguintes literais:

$$\varphi_j^i = \begin{cases} \neg V_j, & \text{se} \quad V_j \text{ recebe o valor F na linha } L_i \\ V_j, & \text{se} \quad V_j \text{ recebe o valor V na linha } L_i \end{cases}$$

Considere agora, para cada $i = 1, ...k$ a conjunção $\varphi_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \varphi_j^i$. Finalmente, definimos

$$\psi = \bigvee_{i=1}^{k} \varphi_i$$

Vale notar que o procedimento acima nada mais faz do que encontrar a $\neg FNC(\neg\varphi)$.

Atividade 03. Suponha que uma tabela verdade tenha, na coluna de resultados, muito mais valores verdade F do que V. É mais fácil encontrar a fórmula correspondente a esta tabela verdade na FNC ou na FND ? Explique o porquê.

R.: Sabemos que precisamos das linhas cuja coluna de resultados assuma valores F para construir a FNC e valores V para construir a FND. Logo, de uma tabela com muitos mais valores F do que V, notoriamente é mais fácil construir uma fórmula na FND.

Atividade 04. Encontre uma fórmula na FND que gere a seguinte tabela verdade.

V_1	V_2	V_3	?
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

R.: $(V_1 \wedge V_2 \wedge V_3) \vee (V_1 \wedge V_2 \wedge \neg V_3) \vee (V_1 \wedge \neg V_2 \wedge V_3) \vee (V_1 \wedge \neg V_2 \wedge \neg V_3) \vee (\neg V_1 \wedge V_2 \wedge \neg V_3) \vee (\neg V_1 \wedge \neg V_2 \wedge V_3) \vee (\neg V_1 \wedge \neg V_2 \wedge \neg V_3)$

Ou poderia ser $V_1 \vee \neg V_2 \vee \neg V_3$ que também está na FND.

Atividade 05. Quantas tabelas verdade com n variáveis existem ? Justifique.

R.: 2^{2^n}, pois uma tabela de n variáveis possui 2^n linhas e, portanto, todas as tabelas possíveis são simplesmente as permutações possíveis de V´s e F´s destas linhas.

Unidade 9

Sintaxe do Cálculo Proposicional

Atividades Individuais

Atividade 01. Prove que $A \longrightarrow B$, $B \longrightarrow C$, $C \longrightarrow D$, $A \vdash D$.

R.:

1. $A \longrightarrow B$ por hipótese. Esta fórmula aparece antes de $\vdash$ no esquema $A \longrightarrow B$, $B \longrightarrow C$, $C \longrightarrow D$, $A \vdash D$ e, portanto, pode aparecer na seqüência de fórmulas da prova;
2. $B \longrightarrow C$ por hipótese, a explicação é a mesma do item anterior;
3. $C \longrightarrow D$ por hipótese. Idem ao anterior;
4. A por hipótese;
5. B, por MP com 1 e 4;
6. C, por MP com 2 e 5;
7. D, por MP com 3 e 6.

Atividade 02. O que é um teorema ?

R.: Uma fórmula B é um teorema do CP se B aparece como último elemento de uma prova que utiliza os axiomas do CP e a regra Modus ponens.

Atividade 0. 3. Faça uma prova formal dos seguintes teoremas:

(a) $\neg\neg A \longrightarrow A$

R.: Veja no livro.

(b) $A{\longrightarrow}B,\ B{\longrightarrow}C \vdash A{\longrightarrow}C$. Utilize o fato de que $\Gamma \vdash A{\longrightarrow}B$ sse $\Gamma,\ A \vdash B$.

R.: Pelo teorema da dedução, se provarmos $\{A \longrightarrow B, B \longrightarrow C, A\} \vdash C$, teremos provado $A{\longrightarrow}B,\ B{\longrightarrow}C \vdash A{\longrightarrow}C$. Então provaremos esta primeira afirmação, que é mais fácil de ser provada.
1. $A \longrightarrow B$, por hipótese;
2. $B \longrightarrow C$, por hipótese;
3. A por hipótese;
4. B, MP entre 1 e 3;
5. C, MP entre 2 e 4;

(c) $((A{\longrightarrow}(\neg A{\longrightarrow}A)){\longrightarrow}((A{\longrightarrow}\neg A){\longrightarrow}(A{\longrightarrow}A)))$

R.: Pelo axioma $A2$, temos que:
Axioma A2: $((A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C)))$; neste caso fizemos a substituição de B por $\neg A$ e C por A obtendo
$((A{\longrightarrow}(\neg A{\longrightarrow}A)){\longrightarrow}((A{\longrightarrow}\neg A){\longrightarrow}(A{\longrightarrow}A)))$

Atividades Coletivas

Atividade 01. Explique o que é uma prova.

R.: É uma seqüência de fórmulas na qual cada fórmula é um axioma ou é deduzida pelas regras de dedução a partir de fórmulas anteriores.

Atividade 02. Explique o que é um esquema de axioma. É $A{\longrightarrow}(B{\longrightarrow}A)$ realmente um axioma ?

R.: Um esquema de axioma é uma representação genérica de axiomas, com variáveis (meta-fórmulas) que podem ser substituídas por fórmulas quaisquer e assim representar infinitos axiomas.

Atividade 03. Explique o que querem dizer as notações seguintes, onde A e B são fórmulas quaisquer e Γ é um conjunto de fórmulas:

(a) $A, B \vdash A$

(b) $\Gamma \vdash A$

(c) $A \vdash B$

(d) $A \nvdash \neg A$

(e) $\vdash_{cp} A \longrightarrow A$

R.:

- (a) utilizando A e B como hipóteses, pode-se deduzir A no CP.
- (b) utilizando as fórmulas do conjunto Γ como hipóteses, pode-se deduzir A no CP.
- (c) utilizando A como hipótese, pode-se deduzir B no CP.
- (d) $\neg A$ não pode ser deduzido no Cálculo Proposicional a partir de A.
- (e) $A \longrightarrow A$ pode ser provada no Cálculo Proposicional.

Atividade 04. Prove que se $\Gamma \vdash A \longrightarrow B$ então $\Gamma,\ A \vdash B$.

R.: Queremos provar $\Gamma,\ A \vdash B$ mas já sabendo que $\Gamma \vdash A \longrightarrow B$. Então sabemos que, usando Γ como hipótese, podemos deduzir $A \longrightarrow B$. Se acrescentarmos uma fórmula a Γ, como A, também seremos capazes de deduzir $A \longrightarrow B$. Então, $\Gamma,\ A \vdash A \longrightarrow B$. E em $\Gamma,\ A \vdash B$, A é uma das hipóteses. Então na prova de $\Gamma,\ A \vdash A \longrightarrow B$ podemos utilizar tanto A como $A \longrightarrow B$:

1. $A \longrightarrow B$, pois esta fórmula pode ser deduzida a partir de Γ;
2. A, pois é uma das hipóteses;
3. B, MP com 1 e 2.

Logo, $\Gamma,\ A \vdash B$.

Unidade 10

Relação Sintaxe/Semântica

Atividades Individuais

Atividade 01. Podemos utilizar as palavras verdadeiro e falso quando falamos dos teoremas de um sistema formal; isto é, quando falamos exclusivamente da parte sintática de uma teoria ?

R.: A sintaxe não considera os teoremas verdadeiros ou falsos, são apenas conseqüências de símbolos sem significado algum. Uma fórmula é teorema porque é o resultado de uma prova feita de regras bem definidas, não porque seja de alguma forma verdadeira ou falsa.

Atividade 02. Há teorias em que existe uma verdade que nunca é alcançada pelo sistema formal. Isto é, os axiomas e as regras de dedução nunca conseguem produzir algumas fórmulas que sabemos que são verdadeiras. Deveriam ser teoremas, mas não são. O teorema da completude se aplicaria a um destes sistemas (adaptado a ele, logicamente) ?

R.: Não. Se o teorema da completude se aplicasse, todas as verdades deveriam ser produzidas pelo sistema formal. Como não são, ele não se aplica. Neste caso, em alguns sistemas formais pode-se adicionar axiomas e/ou regras de dedução de tal forma que todas as "verdades" sejam produzidas como teoremas. Em outros, surpreendentemente, não adianta adicionar qualquer número de axiomas ou regras: sempre haverá uma fórmula que sabemos ser verdade mas que não pode ser produzida pelo sistema. Mas isto é assunto para um curso mais avançado de lógica.

Atividades Coletivas

Atividade 01. Explique o que é sintaxe e o que é semântica de uma teoria (em particular, do CP).

R.: A sintaxe do CP consiste do esquema de axioma $\neg A \vee A$ das regras de dedução, que são utilizados para produzir teoremas. A semântica do CP consiste na associação de valores verdade a fórmulas dados os valores verdade de suas variáveis. Utiliza-se o termo "semântica" para tudo o que é relacionado ao valor verdade de fórmulas: tabelas verdade, funções de verdade, tautologias, contradições, equivalência lógica, consequência lógica.

Atividade 02. Explique a relação entre sintaxe e semântica, em particular em como um sistema formal é construído e como se confere se o sistema é realmente o que queríamos.

R.: Normalmente, temos uma semântica sobre a qual queremos construir um sistema formal. Isto é, queremos fazer axiomas e regras de dedução que espelhe aquela semântica. No exemplo do CP, temos as tautologias, fórmulas que são sempre verdadeiras independente dos valores das variáveis, e queremos que estas fórmulas sejam os teoremas do sistema formal. A partir daí planejamos os axiomas e as regras para que todos os teoremas obtidos sejam justamente as tautologias. Isto é, toda tautologia deve ser um teorema (completude) e todo teorema deve ser tautologia (correção).

Se por acaso houver alguma tautologia que não pode ser obtida do sistema formal, então o sistema está incorreto. Teríamos que modificar os axiomas e/ou regras para corrigir o problema. E se algum teorema não for tautologia, então também há um erro que deve ser corrigido modificando os axiomas/regras.

Atividade 03. A fórmula $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longleftrightarrow (A \wedge B \longrightarrow C)$ é tautologia. Prove que

$$A \longrightarrow (B \longrightarrow C) \vdash A \wedge B \longrightarrow C$$

R.: Pela definição de $\longleftrightarrow$, $X \longleftrightarrow Y$ é $(X \longrightarrow Y) \wedge (Y \longrightarrow X)$. Se $X \longleftrightarrow Y$ é tautologia, então $X \longrightarrow Y$ é tautologia (por quê?). Como $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longleftrightarrow (A \wedge B \longrightarrow C)$ é tautologia,

$$(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow (A \wedge B \longrightarrow C)$$

é tautologia e temos

$$\vDash (A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow (A \wedge B \longrightarrow C)$$

Se $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C))$ for V, então $(A \wedge B \longrightarrow C)$ também o será. Então

$$A \longrightarrow (B \longrightarrow C) \vDash A \wedge B \longrightarrow C$$

Pelo Teorema da Completude extendido,

$$A \longrightarrow (B \longrightarrow C) \vdash A \wedge B \longrightarrow C$$

Unidade 11

Circuitos Digitais

Atividades Individuais

Atividade 01. Faça o circuito correspondente à fórmula $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$.

R.: Veja a Figura 11.1.

Atividade 02. Faça a fórmula lógica correspondente a $A+B$ e o correspondente circuito com as formas lógicas básicas. Aqui A e B representam um único bit e a coluna de resultados é o primeiro bit da soma de $A+B$.

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

R.: O valor da coluna resultados é exatamente a soma do bit A com B: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$ e $1+1=0$. Este último resultado acontece pois estamos utilizando a base 2 e haveria a

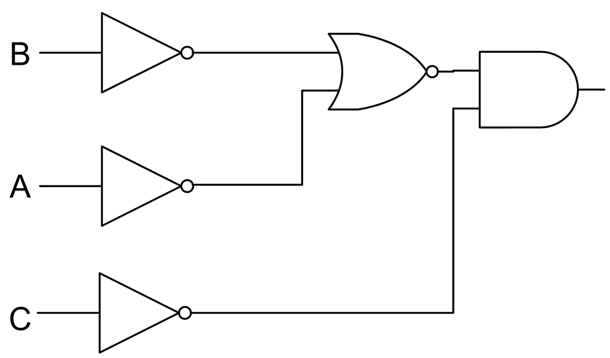

Figura 11.1: Circuito correspondente à fórmula $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$

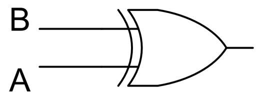

Figura 11.2: Circuito correspondente à fórmula $A \oplus B$

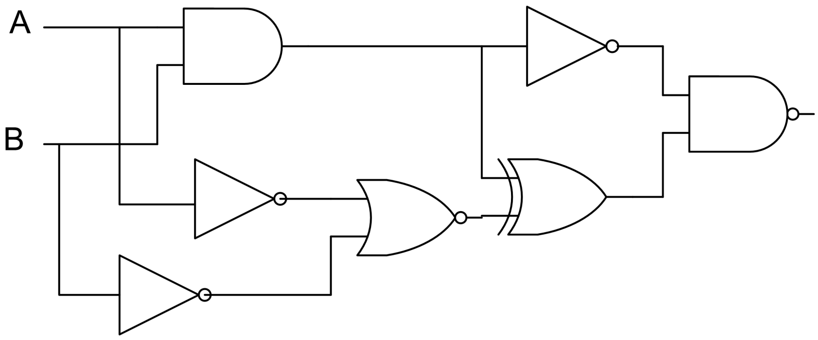

Figura 11.3: Circuito correspondente à fórmula $\neg((A \wedge B) \oplus \neg(\neg A \vee \neg B)) \wedge \neg(A \wedge B)$

passagem do bit “vai um” para a soma dos bits à esquerda.

A fórmula lógica correspondente a $A + B$ é A `xor` B, que é $A \oplus B =_{def} (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$. O circuito está na Figura 11.2.

Atividades Coletivas

Atividade 01. Faça o circuito correspondente a $\neg((A \wedge B) \oplus \neg(\neg A \vee \neg B)) \wedge \neg(A \wedge B)$. Não simplifique ou rearranje as sub-fórmulas.

R.: O circuito está na Figura 11.3

Atividade 02. Faça o circuito correspondente a $((\neg A \vee B) \wedge C) \vee ((A \wedge \neg B) \wedge \neg C)$. Se necessário, simplifique ou rearranje as sub-fórmulas. Lembre-se de que $A \oplus B$ é $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$.

R.: Esta fórmula pode ser modificada:
$((\neg A \vee B) \wedge C) \vee ((A \wedge \neg B) \wedge \neg C) \equiv$
$((\neg(A \wedge \neg B) \wedge C) \vee ((A \wedge \neg B) \wedge \neg C) \equiv$
$(A \wedge \neg B) \oplus C$

O circuito correspondente à última fórmula é mostrada na Figura 11.4.

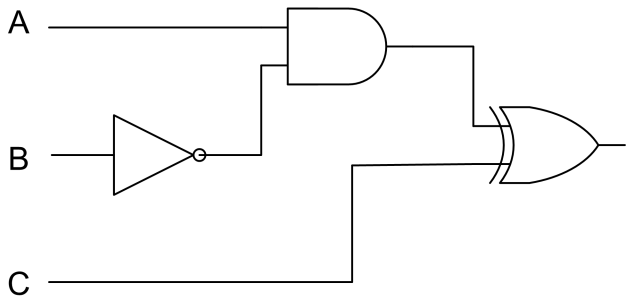

Figura 11.4: Circuito correspondente à fórmula $(A \wedge \neg B) \oplus C$

Unidade 12

Lógica de Primeira Ordem

Atividades Individuais

Atividade 01. O que é uma linguagem de primeira ordem ?

R.: Uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ é sempre associada a um vocabulário $\mathcal{V}$ que é uma tripla formada por um conjunto de símbolos de predicado, um conjunto de símbolos de função e um conjunto de símbolos de constante. Os símbolos utilizados por $\mathcal{L}$ são os dos conjuntos de $\mathcal{V}$ mais as variáveis x_1, x_2, x_3, ... e os símbolos =, , (vírgula), (,), ¬ e ⟶. Há regras precisas que definem exatamente quais as fórmulas válidas em $\mathcal{L}$ — confira na apostila.

Atividade 02. Cite uma proposição que pode ser expressa na lógica de primeira ordem mas não no cálculo proposicional.

R.: Todos os alunos de ILM são inteligentes.

$$\forall x(A(x) \to I(x))$$

onde $A(x)$ indica que "x é um aluno" e "$P(x)$ indica que x é inteligente".

Atividade 03. Elimine os parênteses desnecessários das seguintes fórmulas

- $(\forall x\ (P(x) \vee Q(x))) \wedge (\exists z\ (z < 0) \longrightarrow R(z))$

  R.:

  $$\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \wedge \exists z\ z < 0 \longrightarrow R(z)$$

- $(x < 1) \wedge (\exists y\ (y < x \wedge P(y)))$

  R.:

  $$x < 1 \wedge \exists y\ (y < x \wedge P(y))$$

- $\exists x\,(\forall y\, P(x,y)) \longrightarrow (\exists z\, Q(x,z))$

  R.:
$$\exists x \forall y\, P(x,y) \longrightarrow \exists z\, Q(x,z)$$

- $\exists x\,(\forall w\,(\forall y\, P(x,y,w))) \longrightarrow (\exists z\, Q(x,z))$

  R.:
$$\exists x \forall w \forall y\, P(x,y,w) \longrightarrow \exists z\, Q(x,z)$$

Atividade 04. As fórmulas $\forall x \forall y R(x,\ y)$ e $\forall y \forall x R(x,\ y)$ possuem significados diferentes ? Explique !

R.: Não. A primeira quer dizer "Para todo x e para todo y, $R(x,\ y)$ é verdadeiro". A segunda, "Para todo y e para todo x, $R(x,\ y)$ é verdadeiro". A mesma coisa.

Atividade 05. Considere a linguagem $\mathcal{L}$ com os símbolos de predicado $D(x,y)$, $A(x)$ e $P(x,y)$ e a constante c. Suponha que em uma certa interpretação, o significado dos predicados correspondentes seja:

- $D(x,\ y)$, x é uma disciplina mais difícil do que y;
- $A(x)$, x é uma disciplina que possui uma apostila;
- $P(x,\ y)$, as provas de x são mais difíceis do que as provas de y;
- c é a disciplina "Introdução à Lógica".

Faça fórmulas na linguagem $\mathcal{L}$ que representem, nesta interpretação, as frases seguintes:

(a) qualquer disciplina é mais difícil do que Introdução à Lógica;

  R.: $\forall x\,(\neg(x = c) \longrightarrow D(x,\ c))$

(b) há uma disciplina que é mais difícil do que todas as demais;

  R.: $\exists x \forall y\,(\neg(x = y) \longrightarrow D(x,\ y)$

(c) se as provas de uma disciplina D_1 são mais difíceis do que as da disciplina D_2, então a disciplina D_1 é mais difícil do que D_2. Os símbolos D_1 e D_2 representam disciplinas quaisquer, não constantes da linguagem ou do universo do modelo;

  R.: $P(x,\ y) \longrightarrow D(x,\ y)$ ou $\forall x \forall y\,(P(x,\ y) \longrightarrow D(x,\ y))$

(d) se uma disciplina tem apostila, então ela é a mais fácil de todas;

  R.: $A(x) \longrightarrow \forall y\,(\neg(x = y) \longrightarrow D(y,\ x))$ ou $\forall x\,(A(x) \longrightarrow \forall y\,(\neg(x = y) \longrightarrow D(y,\ x)))$

(e) existe uma disciplina que é mais fácil que todas as outras.

  R.: $\exists x \forall y\,(\neg(x = y) \longrightarrow D(y,\ x))$

(f) existe uma única disciplina;

R.: $\forall x \forall y\, (x = y)$

(g) existe apenas uma outra disciplina além de Introdução à Lógica;

R.: $\exists x\, (\neg(x = c) \wedge \forall y\, (y = c \vee y = x))$

(h) se uma disciplina é mais difícil do que todas as outras, então esta disciplina possui provas mais difíceis do que todas as outras;

$\forall y\, (\neg(x = y) \longrightarrow D(x,\ y)) \longrightarrow \forall z\, (\neg(z = x) \longrightarrow P(x,\ z))$. Ou
$\forall x\, (\forall y\, (\neg(x = y) \longrightarrow D(x,\ y)) \longrightarrow \forall z\, (\neg(z = x) \longrightarrow P(x,\ z)))$

(i) se uma disciplina é mais difícil do que todas as outras, então existe uma disciplina que possui provas mais fáceis do que esta;

$\forall y\, (\neg(x = y) \longrightarrow D(x,\ y)) \longrightarrow \exists z\, P(x,\ z)$. Ou
$\forall x\, (\forall y\, (\neg(x = y) \longrightarrow D(x,\ y)) \longrightarrow \exists z\, P(x,\ z))$

(j) Introdução à Lógica possui provas mais fáceis do que todas as outras disciplinas;

R.: $\forall y(\neg(y = c) \longrightarrow P(y, c))$

(k) se uma disciplina é mais difícil do que alguma outra, então esta disciplina não é Introdução à Lógica.

R.: $\forall x \exists y\, (D(x, y) \longrightarrow \neg(x = c))$

Cuidado com as relações: $D(x,\ x)$ é sempre falso, assim como $P(x,\ x)$. Assuma que $D(x,\ y)$ ou $D(y,\ x)$ seja verdadeiro. Da mesma forma, ou $P(x,\ y)$ ou $P(y,\ x)$ é verdadeiro

Atividade 06. Usando os dados da questão anterior, escreva o que significam as fórmulas abaixo.

(a) $\forall x\, (A(x) \longrightarrow \exists y\, D(y,\ x))$

(b) $\forall x\, (A(x) \longrightarrow (\exists y\, P(y, x) \vee \exists y\, D(y,\ x)))$

(c) $\forall x\, (x = c \vee D(x,\ c) \vee P(x,\ c))$

(d) $\forall x\, \neg D(x,\ y) \longrightarrow y = c$

(e) $\exists x\, (\forall y\, (\neg(x = y) \longrightarrow D(x,\ y)) \longrightarrow \neg(x = c))$

Atividades Coletivas

Atividade 01. Explique as diferenças entre as variáveis no cálculo proposicional e as da lógica de primeira ordem.

Atividade 02. Qual é a interpretação de uma fórmula $\forall x(A(x) \longrightarrow B(x))$? E $(\forall x A(x)) \longrightarrow (\forall x B(x))$?

R.: A primeira fórmula quer dizer "para todo x, se $A(x)$ é verdadeiro então $B(x)$ também é". Então a fórmula $A(x) \longrightarrow B(x)$ deve ser "verdadeira" para todo x. A segunda fórmula quer dizer "se para todo x tivermos $A(x)$, então para todo x teremos também $B(x)$". Isto é, $A(x)$ para todo x implica em $B(x)$ para todo x.

Na primeira fórmula, se $A(x)$ for verdadeiro para um certo x, então obrigatoriamente $B(x)$ tem que ser verdadeiro também, para o mesmo x. Na segunda fórmula, a fórmula poderia ser verdadeira se, para algum x, não tivéssemos $A(x)$. Neste caso, $\forall x A(x)$ seria falso e toda a fórmula seria verdadeira.

Usando a definição de modelos da próxima unidade, um modelo para a primeira fórmula teria que ter $A \subset B$, mas não necessariamente $A = B = U$, onde U é o universo do modelo. Os modelos para a segunda fórmula obrigatoriamente teriam que ter $B = U$ se $A = U$. A segunda fórmula significa "Se $A = U$, então $B = U$", pois $\forall x A(x)$ é verdadeiro somente se A é verdadeiro para todo x do universo U. O mesmo raciocínio se aplica a B. A primeira fórmula significa $A \subset B$, pois para todo x, se $A(x)$ então $B(x)$.

Atividade 03. Se considerarmos a definição de linguagem de primeira ordem estritamente, será $\forall x\, P(x)$ uma fórmula válida?

R.: Não, porque na definição estrita da LPO usa-se x_i para variáveis e fórmulas com $\forall$ são do tipo $((\forall x)A)$ onde x é uma variável qualquer e A é uma fórmula. Uma fórmula estritamente correta seria $((\forall x_1)\, P(x_1))$.

Atividade 04. Represente as seguintes sentenças em uma linguagem da LPO (você precisará de uma linguagem para cada sentença). Sempre que possível, simplifique-as e depois represente-as novamente em Português. Utilize predicados como R(x) para "x é responsável". Explique o significado dos predicados que você utilizar.

(a) Todos os deputados querem que a CPI termine em Pizza.

   R.: $\forall x(D(x) \longrightarrow P(x))$ onde $D(x)$ é "x é deputado" e $P(x)$ é "x quer que a CPI termine em Pizza".

(b) Existe um político que não quer que a CPI termine em Pizza.

(c) Não é verdade que se um animal nada ele é um peixe.

(d) Não é verdade que se um animal nada ele não é um mamífero.

(e) João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria que amava Joaquim que amava Lili, que não amava ninguém.

(f) X não gosta de ninguém que goste dele.

(g) É tão fácil trocar uma lâmpada que qualquer um pode fazê-lo.

(h) Se ele pode fazer a lição, então qualquer um pode.

(i) Pelo menos uma pessoa é inteligente.[1]

(j) Se João consegue fazer o exercício, Pedro não consegue. E vice-versa. Mas quando Pedro consegue, pelo menos uma outra pessoa da turma consegue fazer o exercício.

(k) O barbeiro de uma aldeia faz a barba de todo mundo que não faz a barba de si mesmo.

(l) Se dois conjuntos têm os mesmos elementos, eles são iguais.

Atividade 05. Qual a diferença entre as fórmulas $\forall x R(x) \longrightarrow S(x)$ e $\forall x (R(x) \longrightarrow S(x))$? Preferencialmente, cite um exemplo para diferenciá-las.

Atividade 06. Considere uma linguagem com os símbolos usuais da Aritmética: $+$, $-$, $\boldsymbol{.}$, $<$, 0 e 1. A linguagem possui apenas estes símbolos — não possui 2 como símbolo, por exemplo, nem / (de divisão). Faça fórmulas nesta linguagem que correspondam aos seguintes predicados:

(a) $M(x,\ y)$, x é maior do que y;

R.: $\neg(x = y) \wedge \neg(x < y)$

(b) $D(x,\ y)$, x divide y;

R.: $\exists z\ (y = x \boldsymbol{.} z)$

(c) $R(x,\ y,\ z)$, z é o resultado da divisão de x por y;

R.: $\exists r\ ((x = y \boldsymbol{.} z + r) \wedge (0 = r \vee 0 < r) \wedge (r < y))$

(d) $P(x)$, x é um número primo;

R.: $\neg\exists y \exists z\ ((x = y \boldsymbol{.} z) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(z = 1))$

(e) $E(x,\ y)$, $x^2 = y$;

R.: $x \boldsymbol{.} x = y$

Escrevemos acima, em cada item, o nome do símbolo de predicado, seus possíveis argumentos e a sua interpretação na Aritmética.

Atividade 07. As fórmulas $\forall x \exists y R(x,\ y)$ e $\exists y \forall x R(x,\ y)$ possuem significados diferentes ? Explique !

[1] A notação $\exists x$ "significa", na linguagem comum, que existe um x. Mas nada impede que exista mais do que um. Assim, $\exists x$ de fato significa "um ou mais".

R.: Sim. A primeira fórmula, $\forall x \exists y R(x, y)$, significa, quando interpretada, que para todo x existe um y (que depende de qual x foi escolhido) tal que $R(x, y)$. Então para cada x podemos escolher um y diferente, baseado naquele x. Isto na interpretação, é bom não esquecer.

A segunda fórmula, $\exists y \forall x R(x, y)$, significa, quando interpretada, que existe um y tal que, para todo x, temos $R(x, y)$. Então o mesmo y serve para todos os x.

Unidade 13

Semântica da Lógica de Primeira Ordem

Atividades Individuais

Atividade 01. Faça outro modelo para o conjunto Γ_{abs}. Suponha que os professores do ensino fundamental de uma escola façam um curso em uma Universidade onde haja pelo menos dois professores, um homem e uma mulher, que não ensinem no ensino fundamental. A relação Devora(x, y) é "x ensina y".

R.: Descrição do modelo:

1. Temos os professores da escola fundamental $a_1, a_2, ..., a_{30}$.
2. Temos os professores da Universidade p_1, p_2.
3. Temos os professores da Universidade que não dão aula no ensino fundamental pn_1, pn_2.

Predicados:

1. ProfUniv(x) indica que x é professor da Universidade. Então ProfUniv $= \{p_1,\ p_2,\ pn_1,\ pn_2\}$; Este predicado é associado ao símbolo de predicado P_c;
2. ProfFund(x) indica que x é aluno da Universidade e professor do ensino fundamental. Então ProfFund $= \{a_1,\ a_2,\ \ldots a_{30}\}$. Este predicado é associado ao símbolo de predicado P_h ;
3. Ensina$(x,\ y)$ indica que x ensina y. Então Ensina$(x,\ y) = \{(x,\ y)|x \in$ ProfUniv e $y \in$ ProfFund$\}$. Este predicado é associado ao símbolo de predicado P_d.
4. Professor(x) indica que x é professor, seja de qual área for. Então
   Professor $= \{a_1, ..., a_{30}, p_1, p_2, pn_1, pn_2\}$
   Este predicado é associado ao símbolo de predicado P_{an}.

5. Fundamental(x) indica que x dá aulas na escola fundamental. Então Fundamental $= \{p_1, p_2, a_1, a_2, \ldots$
   Este predicado é associado ao símbolo de predicado P_{af}.

6. Universitario(x) indica que x dá aulas na Universidade. Então Universitario $= \{pn_1, pn_2, p_1, p_2\}$. Este predicado é associado ao símbolo de predicado P_{am}.

7. SoUniversitario(x) indica que x só dá aulas na Universidade, e não na escola fundamental. Então SoUniversitario $= \{pn_1,\ pn_2\}$. Este predicado é associado ao símbolo de predicado P_p.

A constante c é associada a_1.

Atividade 02. Explique a frase: "um conjunto de fórmulas lógicas comprimem informações sobre uma parte do mundo real". Na sua explicação, explique porque as deduções que podem ser feitas utilizando as fórmulas permitem comprimir uma grande quantidade de informação em poucas fórmulas.

Atividade 03. Faça outro modelo com números para as fórmulas Γ_{abs}. Sugestão: acrescente elementos no conjunto universo de Num.

Atividade 04. Faça **dois** modelos para a fórmula $\forall x \forall y \exists z\, (\neg(z = x) \wedge \neg(z = y))$. Interpretada nestes modelos, o que quer dizer a fórmula?

R.: A interpretação é: "para dois elementos quaisquer x e y, sempre há um z diferente de x e diferente de y". Então o conjunto universo do modelo tem que ter pelo menos três elementos.

Modelo 1: universo $\{0, 1, 2\}$, sem predicados ou funções.

Modelo 2: universo $\mathbb{N}$, sem predicados ou funções.

Atividade 05. Considere uma estrutura $\mathfrak{A}$ com universo $\{2, 4, 8, 10\}$, predicado $<$ e funções $+$ $\times$. Os predicados e funções possuem a interpretação usual da aritmética. Baseado nesta estrutura, faça:

(a) a linguagem apropriada para representar fórmulas que podem ser interpretadas nesta estrutura;

R.: A linguagem possui símbolo de predicado binário $<$, símbolos de função binários $+$ e $\times$ e símbolo de constante 2.

(b) uma única fórmula tal que $\mathfrak{A}$ seja modelo desta fórmula;

R.: $\forall x\, (x = 2 \vee 2 < x)$

(c) outra estrutura $\mathfrak{B}$ diferente de $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{B}$ também seja modelo desta fórmula;

R.: A estrutura $\mathfrak{B}$ com universo $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geqslant 2\}$ com o predicado $<$ com a interpretação usual da aritmética. 2 na linguagem é associado a 2 na estrutura e $<$ da linguagem é associado a $<$ na estrutura (estas observações não precisam ser feitas normalmente. Se não o forem, elas ficam sub-entendidas).

(d) um conjunto de fórmulas Γ com pelo menos duas fórmulas tal que $\mathfrak{A}$ seja modelo deste conjunto;

R.: $\Gamma = \{\neg(\forall x\ (\exists y\ (2 \times y = x))), \exists x \exists y\ (2 \times x = y), \forall x \forall y \forall z\ (x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z), \exists x \exists y \exists z\ (x + y = z)\}$

Vejamos:

- $\neg(\forall x\ (\exists y\ (2 \times y = x)))$, não é verdade que para todo x exista um y tal que $2 \times y = x$. Basta tomar $x = 10$. y deveria ser 5, que não pertence a $\{2, 4, 8, 10\}$;
- $\exists x \exists y\ (2 \times x = y)$, existe um x e existe um y tal que $2 \times x = y$. Tome $x = 4$ e $y = 8$;
- $\forall x \forall y \forall z\ (x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z)$, para todo x, y e z, se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$. Trivial;
- $\exists x \exists y \exists z\ (x + y = z)$, existe um x, y e z tal que $x + y = z$. Tome $x = 2$, $y = 8$ e $z = 10$.

(e) outra estrutura $\mathfrak{B}$ diferente de $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{B}$ também seja modelo do conjunto Γ definido no item anterior.

R.: Tome a estrutura com o conjunto $\{0, 2, 5, 10, 15\}$ e com os predicados e funções como $\mathfrak{A}$.

Vejamos:

- $\neg(\forall x\ (\exists y\ (2 \times y = x)))$, não é verdade que para todo x exista um y tal que $2 \times y = x$. Basta tomar $x = 2$. y deveria ser 1, que não pertence ao universo da estrutura;
- $\exists x \exists y\ (2 \times x = y)$, existe um x e existe um y tal que $2 \times x = y$. Tome $x = 5$ e $y = 10$;
- $\forall x \forall y \forall z\ (x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z)$, para todo x, y e z, se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$. Trivial;
- $\exists x \exists y \exists z\ (x + y = z)$, existe um x, y e z tal que $x + y = z$. Tome $x = 5$, $y = 10$ e $z = 15$.

Note que poderíamos ter feito uma estrutura que não empregasse números naturais e sim alguma coisa bem diferente, como conjuntos de animais, relações entre pessoas, notas musicais, etc. Os símbolos $<$, $+$ e $\times$ teriam significados nestas estruturas que não guardariam nenhuma relação com os da aritmética. Por exemplo, $x < y$ poderia significar que x e y são dois animais que pertecem ao mesmo gênero.

Atividades Coletivas

Atividade 01. Coloque o modelo Fig no formato apresentado ao fim da Unidade, em forma de relações.

R.: BolaPreta $= \{bp_1, bp_2\}$;
QuadradoPreto $= \{qp_1, ..., qp_4\}$;
QuadradoPretoEnvolto $= \{qpe_1\}$;
BolaGrande $= \{bg_1\}$;
ADireitaDoMeio $= \{bp_2, qp_1, ..., qp_4, qpe_1, bg_1\}$;

AEsquerdaDoMeio = $\{bp_1\}$;
CorPreta = $\{(x)|x \in$ BolaPreta ou $x \in$ QuadradoPreto ou $x \in$ QuadradoPretoEnvolto$\}$;
Seta = $\{(x, y)|x \in$ BolaPreta e $y \in$ QuadradoPreto ou $x \in$ QuadradoPreto e $y \in$ BolaGrande ou $x \in$ QuadradoPretoEnvolto e $y \in$ BolaGrande$\}$;
Sendo Seta o equivalente a Devora (ou o símbolo de predicado P_d); ADireitaDoMeio é similar a Africano (ou o símbolo de predicado P_{af}); AEsquerdaDoMeio, a Americano (P_{am}); CorPreta, a Animal (P_{an}; QuadradoPreto e QuadradoPretoEnvolto, a Herbívoro (P_h); BolaPreta, a Carnivoro (P_c); e BolaGrande, à constante c.

Atividade 02. Faça um modelo para todas as fórmulas

$\forall x(P(x) \longrightarrow Q(x))$
$\exists x(\neg(x = c) \longrightarrow Q(x))$
$\forall x \forall y(f(x) = f(y) \longrightarrow x = y)$
$\exists x(f(x) = c)$

R.: Definimos como o universo o conjunto dos números ímpares. Assim, temos que:
P = $\{(x)|x$ é ímpar$\}$;
Q = $\{(x)|x$ possui um quadrado ímpar$\}$;
Assim, temos que para todo x ímpar, ele possui um quadrado (conforme nos diz a primeira fórmula). Além disso, sabemos que se $f(x) = f(y)$, então $x = y$ (como nos diz a terceira fórmula).

Atividade 03. Há algum modelo para a fórmula $\forall x \forall y \, \neg(x = y)$?

R.: Claramente não. Interpretada, ela quer dizer que $x \neq y$ para todo x e y. Mas x e y podem assumir o mesmo elemento de um conjunto qualquer e então $x = y$. Se não ficou claro, tente o conjunto $\{0, 1\}$. Se $x = y = 0$, então claramente não é verdade que $x \neq y$.

Atividade 04. Considere uma estrutura $\mathfrak{A}$ com universo $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\} = \{x : x \in \mathbb{N}$ e x é primo$\}$, predicados $<$ e D ($D(x, y)$ significa que x é divisível por y) e funções $+$ e $\times$. Os predicados e funções possuem a interpretação usual da aritmética. Baseado nesta estrutura, faça:

(a) a linguagem apropriada para representar fórmulas que podem ser interpretadas nesta estrutura;

R.: a linguagem possui símbolos de predicado binários $<$ e D, símbolos de função binários $+$ e $\times$ e símbolo de constante 2.

(b) uma única fórmula tal que $\mathfrak{A}$ seja modelo desta fórmula;

R.: $\forall x \, \neg\exists y \, (\neg(x = y) \wedge D(x, y))$. Interpretada esta fórmula quer dizer "para todo x do modelo, não existe um y tal que $x \neq y$ e x é divisível por y".

(c) outra estrutura $\mathfrak{B}$ diferente de $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{B}$ também seja modelo desta fórmula;

R.: A estrutura $\mathfrak{B}$ possui os mesmos predicados e funções que $\mathfrak{A}$ mas o conjunto universo é $\{2, 9, 11, 15, 25\}$. Claramente, nenhum número deste conjunto é divisível por nenhum outro diferente dele, que é o que exige a fórmula acima;

(d) um conjunto de fórmulas Γ com pelo menos três fórmulas tal que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sejam modelos deste conjunto.

R.: $\Gamma = \{\forall x \neg \exists y (\neg(x = y) \wedge D(x, y)), \exists x \exists y \exists z (z = y + x), \forall x \forall y (D(x, y) \longrightarrow x = y), \neg(\exists x \exists y (x \times y = x)\}$

$\mathfrak{A}$ é modelo de Γ:

- $\forall x \neg \exists y\ (\neg(x = y) \wedge D(x, y))$, verdadeira pelo item (b);
- $\exists x \exists y \exists z\ (z = y + x)$, existe x, y e z tal que $z = y + x$. Tome $x = 2$, $y = 5$ e $z = 7$;
- $\forall x \forall y\ (D(x, y) \longrightarrow x = y)$, para todo x e y, x é divisível por y implica em que $x = y$. Claramente, nenhum número primo divide outro a não ser ele mesmo;
- $\neg(\exists x \exists y\ (x \times y = x)$, não é verdade que existem x e y tal que $x \times y = x$. Neste caso, y deveria ser 1, que não pertence ao universo de $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{B}$ é modelo de Γ:

- $\forall x \neg \exists y\ (\neg(x = y) \wedge D(x, y))$, verdadeira pelo item (c);
- $\exists x \exists y \exists z\ (z = y + x)$, existe x, y e z tal que $z = y + x$. Tome $x = 2$, $y = 9$ e $z = 11$;
- $\forall x \forall y\ (D(x, y) \longrightarrow x = y)$, para todo x e y, x é divisível por y implica em que $x = y$. Claramente, nenhum elemento do conjunto $\{2, 9, 11, 15, 25\}$ divide outro a não ser ele mesmo;
- $\neg(\exists x \exists y\ (x \times y = x)$, não é verdade que existem x e y tal que $x \times y = x$. Neste caso, y deveria ser 1 e $1 \notin \{2, 9, 11, 15, 25\}$, o universo do modelo $\mathfrak{B}$.